АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ОРДЕНА ЛЕНИНА МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им.В.А.СТЕКЛОВА
ЛЕНИНГРАДСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

Препринты ЛОМИ

Р - 2 - 84

Ю.Г.Тетерин

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЧИСЕЛ СПИНОРНЫМИ РОДАМИ

Ленинград
1984

Yu.G.Teterin

REPRESENTATIONS OF NUMBERS BY SPINOR GENERA

A simple formula for the measure of representations by spinor genera is obtained. For the positive ternary forms the formula shows that the theta series of a spinor genus is equal to the theta series of the genus plus a linear combination of theta functions attached to forms of one variable. It is shown that the difference between theta series of a ternary form and that of its spinor genus is a cusp form orthogonal to all such theta functions. A non-analytical proof of the main formula is also sketched.

CONTENTS

	Introduction	3
	Notation	4
1.	Main result	6
2.	Theta series of spinor genus	9
3.	Representations of numbers by ternary forms	11
4.	Proof of main result	14
5.	A non-analytical approach	17
	References	19

Библиографическая ссылка:
Ю.Г.Тетерин. Препринт ЛОМИ Р-2-84
Ленинград, 1984

Введение.

Вопросу о представлении чисел и квадратичных форм спинорными родами посвящено большое количество работ - [5,8,12-15, 19,20] и др. Однако до сих пор основное внимание уделялось вопросам существования представлений; количественные вопросы рассматривались только в известной статье Кнезера [15] (см. также [19] , предложение 2.1 и [6] , §10,12). Целью нашей работы является доказательство простой формулы для меры представимости чисел спинорными родами. Основное внимание уделено случаю тернарных форм. Полученные результаты имеют следующие приложения:

1) они позволяют полностью решить задачу о представлении чисел тернарными квадратичными формами в "неопределенном" случае, когда спинорный род совпадает с классом;

2) мера представимости спинорным родом дает главный член ожидаемой асимптотической формулы для числа представлений тернарной формой в "определенном" случае - см. §3;

3) они тесно связаны с вопросом о так называемых "точных" формулах для числа представлений тернарными формами - см. §§1, 3.

Структура статьи следующая. В §1 будет сформулирован основной результат - теорема А (и ее важное следствие - теорема В), содержащая формулу для меры представимости спинорным родом. В §2 показано, что для положительных форм теорема А очень естественно интерпретируется на языке модулярных форм и легко получается из уже известных результатов теории спинорных родов и теории модулярных форм. В §3 полученные результаты применяются к вопросу о представлении чисел положительными тернарными формами. Здесь показано, что разность между тэта-рядами такой формы и ее спинорного рода является параболической модулярной формой, ортогональной пространству обобщенных тета-рядов форм одной переменной. Отсюда, в частности, следует асимптотическая формула с неулучшаемым остаточным членом для числа представлений чисел, входящих в квадратичные классы делителей определителя формы, изучение которых до сих пор представляло значительные сложности. В §4 на основе результатов §2 дано доказательство теоремы А в полной общности. В §5 описан другой подход к доказательству теоремы В (почти эквивалентной теореме А), не использующий теории модулярных форм, а основанный только на применении теории меры Хаара на адельной ортогональной группе и изучении структуры множества представлений.

Автор приносит глубокую благодарность А.В.Малышеву за помощь в подборе литературы по теории спинорных родов и внимание к работе, О.М.Фоменко за большую помощь в подборе литературы и консультации по теории модулярных форм и Е.П.Голубевой за плодотворные обсуждения.

Обозначения

Мы будем в основном придерживаться терминологии и обозначений [18] . Пусть F – алгебраическое числовое поле с кольцом целых элементов $\mathfrak{o}$, F_J^* – его группа иделей, N – абсолютная норма в F ; малыми готическими буквами мы обозначаем идеалы в F ; $\mathfrak{p}$ – простой идеал, в бесконечных произведениях также архимедовы нормирования. Пусть V – регулярное F– пространство с квадратичной функцией Q , $\dim V = n$, $d \in \operatorname{disc} V$; L – решетка в V, нормы $\mathfrak{n}(L)$, $L^{\#}$ – двойственная решетка; $O_A^+(V)$– адельная ортогональная группа, $O_A^+(L) = \{\Sigma \in O_A^+(V) \mid \Sigma L = L\}$; θ – спинорная норма;

$\operatorname{cls} L$, $\operatorname{spn} L$, $\operatorname{gen} L$ – собственные класс, спинорный род и род L (значок $^+$ мы опускаем)[x)];

x) Впрочем, все результаты справедливы и для несобственных классов и несобственных спинорных родов, а в наиболее интересном для нас случае $n=3$ эти понятия просто совпадают.

$$\mathfrak{t}_L(\bar{x}) = \{a \in F \mid a\bar{x} \in L\}^{-1}.$$

Обозначение $A \subset B$ не исключает случая $A = B$.

Пусть $m \in F^*$, $\mathfrak{K} = \bigcup_{i=1}^{k} \operatorname{cls} M_i$. В "определенном" случае, когда F вполне вещественно, а Q вполне определенная, введём меру представимости m совокупностью $\mathfrak{K}$:

$$R(\mathfrak{K}, m) = \Big(\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\# O^+(M_i)}\Big)^{-1} \cdot \sum_{i=1}^{k} \frac{\#\{\bar{x} \in M_i \mid Q(\bar{x}) = m\}}{\# O^+(M_i)} ; \qquad (I)$$

аналогично определяется мера представимости с делителем $\mathfrak{t}$:

$$r(\mathfrak{K}, m, \mathfrak{t}) = \Big(\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\# O^+(M_i)}\Big)^{-1} \cdot \sum_{i=1}^{k} \frac{\#\{\bar{x} \in V \mid Q(\bar{x}) = m,\ \mathfrak{t}_{M_i}(\bar{x}) = \mathfrak{t}\}}{\# O^+(M_i)} ; \qquad (2)$$

эти определения стандартным образом обобщаются на случай произвольных форм (см. [15,16]): пусть $M \in \operatorname{gen} L$, $\bar{x} \in M$, $Q(\bar{x}) = m$. Обозначим через $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(\bar{x}, M)$ род представления $(\bar{x}, M)$ (см. [15, 16]). Пусть $V = F\bar{x} \perp W$; $M_i = \Sigma_i M$ с $\Sigma_i \in O_A^+(V)$, $\bigcup_{i=1}^{k} O^+(V)\Sigma_i O_A^+(M) = G$, так что $\mathfrak{K} = GM$; μ_V и μ_W – меры Хаара на $O_A^+(V)$ и $O_A^+(W)$.

$$r_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{K}) = \frac{\mu_V(O_A^+(M))}{\mu_V(O^+(V) \backslash G)} \; \frac{\mu_W(O^+(W) \backslash O_A^+(W) \cap G)}{\mu_W(O_A^+(W) \cap O_A^+(M))} . \qquad (3)$$

Тогда

$$R(\mathfrak{K}, m) = \sum_{\mathfrak{g}(\bar{x}, M):\ M \in \operatorname{gen} L,\ \bar{x} \in M,\ Q(\bar{x}) = m} r_{\mathfrak{g}(\bar{x}, M)}(\mathfrak{K}) ,$$

$$r(\mathfrak{K}, m, \mathfrak{t}) = \sum_{\mathfrak{g}(\bar{x}, M):\ M \in \operatorname{gen} L,\ \mathfrak{t}_M(\bar{x}) = \mathfrak{t},\ Q(\bar{x}) = m} r_{\mathfrak{g}(\bar{x}, M)}(\mathfrak{K})$$

(в случае $-dm \in F^{*2}$ эти величины могут принимать значение $+\infty$). Нашей целью является вычисление $R(\operatorname{spn} L, m)$ и $r(\operatorname{spn} L, m, \mathfrak{t})$.

Замечание I. Нормирующий множитель $(\sum \# O^+(M_i)^{-1})^{-1}$ в (I) и (2) и $\mu_V(O_A^+(M)) / \mu_V(O^+(V) \backslash G)$ в (3) несущественен, поскольку можно показать, что при $n \geqslant 3$ эта величина одинакова для всех спинорных родов из одного рода (ср. предположение 4, §4).

Пусть $a \in F^*$. Через $\left(\frac{a}{\cdot}\right)_*$ обозначим примитивный характер Дирихле, отвечающий характеру $\left(\frac{a}{\cdot}\right)$, т.е. $\zeta_{F(\sqrt{a})}(z)=\zeta_F(z)\cdot L_F\left(z,\left(\frac{a}{\cdot}\right)_*\right)$; через $\mathfrak{f}(a)$ обозначим кондуктор $\left(\frac{a}{\cdot}\right)_*$.

Бесквадратный целый идеал $\mathfrak{a}(a)$ определим условием $(a)=\mathfrak{a}(a)\mathfrak{m}^2$. Введем функцию

$$H_{d;aF^{*2},\mathfrak{t}}(m)=\begin{cases}\left(\frac{-da}{\mathfrak{m}}\right)_* N(\mathfrak{m}), & \text{если } m\in aF^{*2},\\ & (m)=\mathfrak{a}(a)\cdot\mathfrak{t}^2\mathfrak{m}^2,\ \mathfrak{m}\mid\mathfrak{o},\\ 0 & \text{иначе.}\end{cases}$$

Наконец, обозначим

$$\mathcal{N}_J(a)=N_{F(\sqrt{a})/F}\left(F(\sqrt{a})^*_J\right);$$

$$\mathcal{Y}(\mathrm{gen}\,L)=\left\{a\in F^* \mid a\notin F^{*2},\ \mathcal{N}_J(a)\supset\theta\left(O_A^+(L)\right)\right\};$$

это множество состоит из конечного числа квадратичных классов aF^{*2}, причем $\mathfrak{a}(a\cdot\mathfrak{n}(L)^{-1})\mid 2\mathfrak{n}(L^{\#})^{-1}\mathfrak{n}(L)^{-1}$.

§ I. Основной результат

Основным результатом работы является следующая

Теорема А. Пусть $m\neq 0$. Тогда

I) если $n\geqslant 4$, то

$$R(\mathrm{spn}\,L,m)=R(\mathrm{gen}\,L,m);$$

2) если $n=3$, то

$$R(\mathrm{spn}\,L,m)=R(\mathrm{gen}\,L,m)+$$
$$+\sum\chi_{aF^{*2}}(L)\cdot c_{aF^{*2},\mathfrak{t}}(\mathrm{gen}\,L)\cdot H_{d;aF^{*2},\mathfrak{t}}(m);$$

сумма берется по всем квадратичным классам $aF^{*2}\subset\mathcal{Y}(\mathrm{gen}\,L)$ и идеалам $\mathfrak{t}$ с условием $\mathfrak{n}(L)\supset\mathfrak{a}(a)\mathfrak{t}^2\supset\mathfrak{n}(L^{\#})^{-1}\mathfrak{f}(-da)^{-2}$. Величины

$c_{aF^{*2},\mathfrak{t}}(\mathrm{gen}\,L)$ выражаются через $\mathfrak{p}$-адические альтернированные меры представимости (см. §4). Величины $\chi_{aF^{*2}}(L)$ принимают значения ± 1 и обобщают "частичные характеры спинорных родов", введенные Бенхамом и Сией [5].

Для конкретных решеток L значения коэффициентов $\chi\cdot c$ можно получить, непосредственно вычисляя $R(\mathrm{spn}\,L,m)$ для нескольких чисел m малой нормы; это можно сделать эффективно (в "неопределенном" случае приходится применять теорию приведения).

При описании представлений с фиксированным делителем удобнее использовать следствие теоремы А:

Теорема В. Пусть $m\neq 0$. Тогда

I) если $n\geqslant 4$ или $n=3$, $m\notin\mathcal{Y}(\mathrm{gen}\,L)$, то

$$r(\mathrm{spn}\,L,m,\mathfrak{t})=r(\mathrm{gen}\,L,m,\mathfrak{t});$$

2) если $n=3$, $m\in\mathcal{Y}(\mathrm{gen}\,L)$, то множество всех спинорных родов в $\mathrm{gen}\,L$ распадается на два подмножества ("полурода"), зависящих только от класса mF^{*2}: $\mathrm{gen}\,L=\mathcal{P}_1\cup\mathcal{P}_2$, таких, что $\#\{\mathrm{spn}\,M\subset\mathcal{P}_1\}=\#\{\mathrm{spn}\,M\subset\mathcal{P}_2\}$ и если $M\in\mathcal{P}_i$, то

$$r(\mathrm{spn}\,L,m,\mathfrak{t})=r(\mathcal{P}_i,m,\mathfrak{t});$$

3) обозначим

$$r(\mathrm{spn}\,L,m,\mathfrak{t})=r(\mathrm{gen}\,L,m,\mathfrak{t})+\rho(\mathrm{spn}\,L,m,\mathfrak{t}).$$

Тогда если $s\in\mathfrak{o}$, $s\neq 0$, $\mathfrak{q}$ – целый идеал, $m\in\mathfrak{n}(L)\mathfrak{t}^2\mathfrak{q}^2$ и $|m\mathfrak{t}^{-2}\mathfrak{q}^{-2}|_{\mathfrak{p}}<|\mathfrak{n}(L^{\#})^{-1}\mathfrak{f}(-dm)^{-2}|_{\mathfrak{p}}$ для всех $\mathfrak{p}\mid(2\mathfrak{n}(L^{\#})^{-1}\mathfrak{n}(L)^{-1},s\mathfrak{q})$, то

$$\rho(\mathrm{spn}\,L,ms^2,\mathfrak{t})=\rho(\mathrm{spn}\,L,m,\mathfrak{t}\mathfrak{q})\times$$
$$\times\left(\frac{-dm}{s\mathfrak{q}}\right)_*\cdot N(s\mathfrak{q})\cdot\prod_{\substack{\mathfrak{p}\mid s\mathfrak{q},\ \mathfrak{p}\nmid 2\mathfrak{n}(L^{\#})^{-1}(m)\mathfrak{t}^{-2}\mathfrak{q}^{-2}\mathfrak{n}(L)^{-2}}}\left(1-\left(\frac{-dm}{\mathfrak{p}}\right)_* N(\mathfrak{p})^{-1}\right). \qquad (4)$$

Замечание 2. Часть I теоремы А и части I и 2 теоремы В, а также их обобщения на случай представления форм формами известны специалистам, хотя в полной общности и не публиковались. Они легко получаются из результатов [I5] и [I2] (см. предложение 4 в §4; ср. предложение 2.I [I9] и §§I0,I2 [6]).

Замечание 3. Величины $R(\mathrm{gen}\,L, m)$ и $r(\mathrm{gen}\,L, m, t)$, входящие в формулировки теорем А и В, сравнительно легко вычисляются по формулам Зигеля.

Из теоремы В, в частности, следует обобщение известного результата о примитивных спинорных исключениях (см., например, [6] , §12; для простоты мы считаем $F=\mathbb{Q}$):

Следствие. Пусть $F=\mathbb{Q}$, $n=3$, p - простое число, $m\in n(L)$, $|m|_p<|4n(L^{\#})^{-1}|_p$, если $p \mid 2n(L^{\#})^{-1}n(L)^{-1}$. Тогда числа m и mp^2 одновременно являются или не являются примитивными спинорными исключениями для L .

Кроме того, теорема В позволяет впервые дать полный ответ на вопрос, каким именно из полуродов примитивно представляется число m .

Результат теоремы А тесно связан с вопросом о существовании так называемых "точных" формул для числа представлений. Напомним, что для тернарной решетки L (или отвечающей ей квадратичной формы) имеет место "точная" формула (типа Лиувилля), если

$$R(\mathrm{cls}\,L, m) = R(\mathrm{gen}\,L, m) + \sum b_{aF^{*2},t}(L)\cdot H_{d;aF^{*2},t}(m),$$

где суммирование может вестись по произвольному (но конечному) набору aF^{*2}, t . Из теоремы А следует, что если $\mathrm{spn}\,L = \mathrm{cls}\,L$, то для L имеет место "точная" формула. В частности, все примеры таких формул, полученные для тернарных форм Г.А. Ломадзе и Л.А. Сулаквелидзе (результаты и литературу см. в [2]), легко получаются из теоремы А, поскольку во всех рассмотренных ими случаях спинорный род одноклассен. При этом применение теоремы А во много раз сокращает объем необходимых вычислений. В связи со сказанным встает вопрос:

Вопрос I. Существуют ли при $n=3$ решетки, для которых имеют место "точные" формулы, но спинорной род которых не одноклассен?

Из доказываемой в §3 теоремы 2 следует, что если для L имеет место "точная" формула, то $R(\mathrm{cls}\,L, m)=R(\mathrm{spn}\,L, m)$ для всех $m\in F$. Поэтому вопрос I можно переформулировать:

Вопрос 2. Существуют ли при $n=3$ такие решетки L , что $R(\mathrm{cls}\,L, m)=R(\mathrm{spn}\,L, m)$ для всех $m\in F$, но $\mathrm{cls}\,L\neq \mathrm{spn}\,L$?

В случае $F=\mathbb{Q}$ ответ на вопрос 2, по-видимому, может быть получен прямыми вычислениями, поскольку доказано, что в этом случае число классов положительных примитивных форм, обладающих "точными" формулами, конечно. Если удастся доказать абсолютную конечность числа таких классов (для всех полей F , рассматриваемых одновременно), то можно надеяться получить на этом пути и полное решение вопросов I и 2.

Отметим также связь вопроса 2 с гипотезой А статьи [I3].

§ 2. Тета-ряд спинорного рода.

В этом параграфе мы покажем, что в "определенном" случае вполне определенных форм над вполне вещественным полем теорема А легко получается из уже известных результатов теории спинорных родов и теории модулярных форм. Для простоты мы ограничимся случаем $F=\mathbb{Q}$, хотя все рассуждения легко обобщаются на общий "определенный" случай.

Итак, пусть $F=\mathbb{Q}$, (V_∞, Q) анизотропно. Домножая функцию Q на число из $\mathbb{Q}$, мы можем добиться, чтобы Q была положительна и $n(L)=\mathbb{Z}$. Пусть $n(L^{\#})^{-1}=N\cdot\mathbb{Z}$ $(N>0)$. Для $z\in\mathbb{C}$, $\mathrm{Im}\,z>0$ обозначим

$$\vartheta_L(z)=\sum_{x\in L} e^{2\pi i Q(x) z}=\sum_{m=0}^{\infty} R(\mathrm{cls}\,L, m)e^{2\pi i m z},$$

$$\vartheta_{\mathfrak{K}}(z)=\Big(\sum_{\mathrm{cls}\,M\subset \mathfrak{K}} \# O^{+}(M)^{-1}\Big)^{-1}\cdot\sum_{\mathrm{cls}\,M\subset\mathfrak{K}} \# O^{+}(M)^{-1}\cdot\vartheta_M(z)=\sum_{m=0}^{\infty} R(\mathfrak{K}, m)e^{2\pi i m z}.$$

Известно ([2I] , § 2), что ϑ_L , а значит и $\vartheta_{\mathrm{spn}\,L}$, $\vartheta_{\mathrm{gen}\,L}$, принадлежат пространству модулярных форм веса $n/2$ относительно $\Gamma_0(4N)$ с характером $\left(\frac{d}{\cdot}\right)_*$: $G_{\frac{n}{2}}=G_{\frac{n}{2}}\left(4N, \left(\frac{d}{\cdot}\right)_*\right)$.

Следуя [2I] , обозначим через $S_{\frac{n}{2}}=S_{\frac{n}{2}}\left(4N,\left(\frac{d}{\cdot}\right)_*\right)$ подпространство параболических форм из $G_{\frac{n}{2}}$, $E_{\frac{n}{2}}=E_{\frac{n}{2}}\left(4N,\left(\frac{d}{\cdot}\right)_*\right)$ -

подпространство $G_{\frac{n}{2}}$, состоящее из форм, ортогональных $S_{\frac{n}{2}}$ относительно скалярного произведения Петерсона. Тогда теорема Зигеля на языке ϑ-рядов сводится к двум утверждениям:

I) $\vartheta_{\mathrm{gen}\,L} \in E_{\frac{n}{2}}$,

2) $\vartheta_L - \vartheta_{\mathrm{gen}\,L} \in S_{\frac{n}{2}}$.

В этом параграфе мы докажем аналог свойства I) для $\vartheta_{\mathrm{spn}\,L}$. Аналог свойства 2) будет доказан в § 3.

Через $\mathcal{U}=\mathcal{U}(4N,(\frac{d}{\cdot})_*)$ обозначим подпространство $S_{\frac{3}{2}}$, состоящее из форм $f(z)=\sum_{m=1}^{\infty} f_m e^{2\pi i m z}$, обладающих свойством:

существует такое конечное множество чисел B_f , что $f_m=0$, если $m \neq bk^2$, где $b \in B_f$, $k \in \mathbb{Z}$.

Тогда из частей I теорем A и B (которые, как отмечалось, известны специалистам - см. замечание 2) следует

Предложение I. I) Если $n \geq 4$, то $\vartheta_{\mathrm{spn}\,L} = \vartheta_{\mathrm{gen}\,L}$ (и значит $\vartheta_{\mathrm{spn}\,L} \in E_{n/2}$);

2) если $n=3$, то $\vartheta_{\mathrm{spn}\,L} - \vartheta_{\mathrm{gen}\,L} \in \mathcal{U}$ (и значит $\vartheta_{\mathrm{spn}\,L} \in E_{\frac{3}{2}} \oplus \mathcal{U}$).

Начиная с этого момента, мы рассматриваем только случай $n=3$.

Значение части 2 предложения I обуславливается тем, что согласно доказанным недавно результатам, пространство $\mathcal{U}$ порождается обобщенными тэта-рядами форм одной переменной. Именно, пусть $a \in \mathbb{Z}$ бесквадратно,

$$h_{d,ak^2}(z)=\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{-da}{m}\right)_* m \cdot e^{2\pi i a k^2 m^2 z} = \frac{1}{2}\sum_{m\in\mathbb{Z}} H_{d;a\mathbb{Q}^{*2},k\mathbb{Z}}(m) e^{2\pi i m z} .$$

Предложение 2. Набор функций $\{h_{d,c} \mid c>0, c\tau^2 \mid N\}$, где $\tau\mathbb{Z} = \mathfrak{f}(-dc)$, образует базис $\mathcal{U}(4N,(\frac{d}{\cdot})_*)$.

Предложение 2 следует (после небольших уточнений, ср. [7]) из теоремы 3 работы [23] . Обобщение этого результата на случай $F \neq \mathbb{Q}$ дано (на языке модулярных представлений) в статье [II] .

Из предложений I и 2 следует справедливость теоремы A в рассматриваемом случае (пока без уточнения зависимости коэффициентов при $H_{d;aF^{*2};\mathfrak{t}}$ от спинорного рода).

Замечание 4. Предложенное доказательство, по-видимому, можно перенести на "неопределенный" случай, используя вещественно-аналитические формы Мааса. Во всяком случае, было бы интересно получить для таких форм аналог предложения 2.

§ 3. Представления чисел тернарными формами.

Как известно ([I8] , I04:5), в "неопределенном" случае $\mathrm{cls}\,L=\mathrm{spn}\,L$. Поэтому теорема A дает в этом случае полное решение задачи о представлении чисел тернарными формами.

В этом параграфе мы покажем, что $R(\mathrm{spn}\,L,m)$ должна давать главный член асимптотической формулы для $r(\mathrm{cls}\,L,m)$. Основной нашей целью является доказательство того, что $\mathrm{pr}_{E\oplus\mathcal{U}}\vartheta_L = \vartheta_{\mathrm{spn}\,L}$. Предложенное доказательство не является прямым; в его основе лежат результаты работ [9,2I] и [3,4] . Это вынуждает нас ограничиться случаем $F=\mathbb{Q}$. Было бы очень интересно получить прямое доказательство: показать, что при любом $a\in\mathbb{Z}$ величина $\langle h_{d,a},\vartheta_L\rangle$ является инвариантом $\mathrm{spn}\,L$ (здесь $\langle\cdot,\cdot\rangle$ - скалярное произведение Петерсона).

Пусть $S_{\frac{3}{2}} = \mathcal{U} \perp \mathcal{T}$, т.е.

$$\mathcal{T}=\mathcal{T}(4N,(\tfrac{d}{\cdot})_*)=\{f\in S_{\frac{3}{2}} \mid \langle f,u\rangle=0 \text{ при } u\in\mathcal{U}\}.$$

Предложение 3. Если $t(z)=\sum_{m=1}^{\infty} t_m e^{2\pi i m z}\in\mathcal{T}$, то $t_{am^2} = O(m^{1/2+\varepsilon})$; постоянная в знаке O зависит только от t , a и $\varepsilon>0$.

Доказательство. Мы можем считать a бесквадратным. Согласно Шимуре [2I] форме t отвечает модулярная форма веса 2: $B^{(a)}(z)=\sum_{m=0}^{\infty} b_m^{(a)} e^{2\pi i m z}$, где $b_m^{(a)}=\sum_{\delta\mid m}\chi_a(\delta)\cdot t_{a(\frac{m}{\delta})^2}$,

χ_a - характер $\mathrm{mod}\,4N$, отвечающий $\left(\frac{-da}{\cdot}\right)_*$. Следовательно,

$$|t_{am^2}| \leqslant \sum_{\delta | m} |b_\delta^{(a)}|. \qquad (5)$$

Но согласно результату, сформулированному Шимурой [2I] в качестве гипотезы и доказанному различными способами в работах [I0,I7,22,7] , из условия $t \in T$ следует, что $B^{(a)}$ является параболической формой. Поэтому требуемая оценка получается из (5) и результата Айхлера [9] . Предложение 3 доказано.

С другой стороны, продолжая исследования Линника, Малышева [I] и Петерса [I9] , автор доказал следующую теорему (ср. [3,4] ; полное доказательство публикуется в "Известиях АН СССР"):

<u>ТЕОРЕМА I.</u> Пусть M - решетка в тернарном вполне определенном пространстве над вполне вещественным полем F. Тогда

$$r(\mathrm{cls}\,M, m, \mathfrak{t}) = r(\mathrm{spn}\,M, m, \mathfrak{t}) \cdot \left(1 + O\left(\sqrt{\eta \cdot |\log \eta|}\right)\right),$$

где

$$\eta = \frac{\log q_M(-dm,\mathfrak{t})}{\log N(m\mathfrak{t}^{-2})} \max\{-\log L(-dm,\mathfrak{t}), \log\log N(m\mathfrak{t}^{-2})\},$$

$$q_M(-dm,\mathfrak{t}) = \min\left\{N(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \nmid 2m\mathfrak{t}^{-2}\mathfrak{n}(L^\#)^{-1}\mathfrak{n}(L)^{-2}, \left(\frac{-dm}{\mathfrak{p}}\right)_* = 1\right\},$$

$$L(-dm,\mathfrak{t}) = \prod_{\mathfrak{p} \nmid m\mathfrak{t}^{-2}} \left(1 - \left(\frac{-dm}{\mathfrak{p}}\right)_* N(\mathfrak{p})^{-1}\right)^{-1};$$

постоянная в знаке O зависит только от F и $\mathrm{gen}\,L$.

<u>ТЕОРЕМА 2.</u> $\vartheta_L - \vartheta_{\mathrm{spn}\,L} \in T$.

<u>Доказательство</u>. Как известно, $\vartheta_L - \vartheta_M \in S_{\frac{3}{2}}$, если $M \in \mathrm{gen}\,L$. Поэтому $s = \vartheta_L - \vartheta_{\mathrm{spn}\,L} \in S_{\frac{3}{2}}$. Пусть $s(z) = u(z) + t(z) = \sum_{m=1}^{\infty} (u_m + t_m) e^{2\pi i m z}$, $u \in U$, $t \in T$. Тогда из предложения 3 и теоремы I следует, что $u_{ap^2} = O_a\left(p \frac{\log\log p}{\sqrt{\log p}}\right)$ для всех простых чисел p. Ввиду предложения 2 это означает, что $u = 0$. Теорема 2 доказана.

Пусть $\vartheta_L = e + u + t$, $e \in E_{\frac{3}{2}}$, $u \in U$, $t \in T$. Теорема 2 дает единственный известный метод вычисления компоненты u, выражая ее через тэта-ряды $h_{d,m}$ и значения $R(\mathrm{spn}\,L, m)$ для $m \mid 2\mathfrak{n}(L^\#)^{-1}$. Это важно прежде всего потому, что коэффициенты Фурье функции $e+u$ дают главный член ожидаемой асимптотики для $R(\mathrm{cls}\,L, m)$ *). Это следует из предположения, которое можно рассматривать как "гипотезу Петерсона" для веса $3/2$:

$$\text{если } t \in T, \text{ то } t_m = O(m^{1/4+\varepsilon}).$$

Из предложения 3 видно, что наибольшую трудность при доказательстве этой гипотезы доставляет случай бесквадратных чисел m. Недавно Вальдшпургер [24] выразил t_m^2 для бесквадратных m через значения в точке $1/2$ рядов Дирихле, получающихся "скручиванием" L-рядов параболических форм веса $n-1$, отвечающих t, с характером $\left(\frac{-dm}{\cdot}\right)_*$.

До недавнего времени в вопросе о представлении чисел m тернарными формами наиболее непонятным являлся случай $\mathfrak{n}(m\mathfrak{n}(L)^{-1}) \mid 2\mathfrak{n}(L^\#)^{-1}\mathfrak{n}(L)^{-1}$. Как явствует из приведенных результатов, это обуславливалось тем, что в этом случае главный член асимптотики - $R(\mathrm{spn}\,L, m)$ - может не совпадать с особым рядом Харди-Литлвуда. Теперь же именно в этом случае предложение 3 и теорема 2 позволяют получить полное решение задачи (на возможность применения теории Шимуры в этом случае автору указала Е.П.Голубева):

<u>ТЕОРЕМА 3.</u> Пусть $F = \mathbb{Q}$, $n = 3$. Тогда для чисел $m = ak^2$, $a \mid 2\mathfrak{n}(L^\#)^{-1}\mathfrak{n}(L)^{-1}$, $k \in \mathbb{Q}$, имеем

$$R(\mathrm{cls}\,L, m) = R(\mathrm{spn}\,L, m) + O(m^{1/4+\varepsilon});$$

постоянная в знаке O зависит только от $\mathrm{gen}\,L$.

---

*) Вполне вероятно, что использование теории спинорных родов окажется, по-существу, единственно возможным способом вычисления главного члена асимптотики для $R(\mathrm{cls}\,L, m)$ при $n = 3$.

Для чисел m, не удовлетворяющих условию теоремы 3, $R(\mathrm{spn}\,L,m)=R(\mathrm{gen}\,L,m)$ (см. теорему А), поэтому для таких чисел асимптотику можно искать в обычной форме: $R(\mathrm{cls}\,L,m)\sim R(\mathrm{gen}\,L,m)$ (точнее, $r(\mathrm{cls}\,L,m,i)\sim r(\mathrm{gen}\,L,m,i)$).

§ 4. Доказательство основного результата

В этом параграфе мы выразим величину $\rho(\mathrm{spn}\,L,m)=R(\mathrm{spn}\,L,m)-R(\mathrm{gen}\,L,m)$ в виде произведения $\mathfrak{p}$-адических альтернированных мер представимости и, используя результаты §2, выведем отсюда теорему А в полной общности.

Для $a\in\mathcal{V}(\mathrm{gen}\,L)$ определим гомоморфизм $\chi_{aF^{*2}}: O_A^+(V)\to\{\pm1\}$ условием: $\chi_{aF^{*2}}(\Sigma)=1$ тогда и только тогда, когда $\theta(\Sigma)\subset\mathfrak{N}_J(-da)\theta(O^+(V))$ (см. [I2]).

Как известно, часть I теоремы А и части I,2 теоремы В на самом деле получаются из следующего результата:

Предложение 4. Пусть $Q(\bar{x})=m\neq0$, $\Sigma\in O_A^+(V)$. Тогда

I) если $n\geq4$ или $n=3$, $m\notin\mathcal{V}(\mathrm{gen}\,L)$, то
$$r_{\mathfrak{g}(\bar{x},L)}(\mathrm{spn}\,\Sigma L)=r_{\mathfrak{g}(\bar{x},L)}(\mathrm{gen}\,L);$$
2) если $n=3$, $m\in\mathcal{V}(\mathrm{gen}\,L)$, то
$$r_{\mathfrak{g}(\bar{x},L)}(\mathrm{spn}\,\Sigma L)=(1+\chi_{mF^{*2}}(\Sigma))\cdot r_{\mathfrak{g}(\bar{x},L)}(\mathrm{gen}\,L).$$

Доказательство. Получается при соединении метода работы [I5] и результатов [I2] .

Предложение 4 позволяет свести доказательство теоремы А к случаю, когда $n=3$ и m принадлежит фиксированному классу $aF^{*2}\subset\mathcal{V}(\mathrm{gen}\,L)$. Мы можем, очевидно, считать, что $a=Q(\bar{x}_0)$ для некоторого $\bar{x}_0\in V$. Если $m\in aF^{*2}$, т.е. $m=as^2$, $s\in F^*$, то положим $\bar{x}_m=s\cdot\bar{x}_0$. Тогда $Q(\bar{x}_m)=m$.

Зафиксируем произвольную решетку K в V. Положим $\chi^K_{aF^{*2}}(\Sigma K)=\chi_{aF^{*2}}(\Sigma)$.

Пусть α - род представлений числа m. Тогда для некоторого $\Sigma\in O_A^+(V)$ имеем $\alpha=\mathfrak{g}(\bar{x}_m,\Sigma K)$. Положим $\eta^K(\alpha)=\chi_{aF^{*2}}(\Sigma)$. Через $\mathfrak{C}(\bar{x},L_\mathfrak{p})$ обозначим класс соответствующего представления (см. [I6]). Каждый класс представлений

числа m имеет вид $\beta_\mathfrak{p}=\mathfrak{C}(\bar{x}_m,\Psi_\mathfrak{p}K_\mathfrak{p})$, и мы определяем
$$\eta^K_\mathfrak{p}(\beta_\mathfrak{p})=\begin{cases}1, & \text{если } \theta(\Psi_\mathfrak{p})\subset\mathfrak{N}_\mathfrak{p}(-da),\\ -1 & \text{иначе;}\end{cases}$$
здесь $\mathfrak{N}_\mathfrak{p}(-da)$ - $\mathfrak{p}$-компонента $\mathfrak{N}_J(-da)$.

Каждому роду представлений α отвечает набор классов представлений $\beta_\mathfrak{p}$, причем (ср. [I2] , с. I50) $\eta^K(\alpha)=\prod_\mathfrak{p}\eta^K_\mathfrak{p}(\beta_\mathfrak{p})$.

По формулам Зигеля (ср. [I6])
$$r_\alpha(\mathrm{gen}\,L)=\prod_\mathfrak{p} r_{\beta_\mathfrak{p}}(L_\mathfrak{p}),$$
где
$$\prod_{\mathfrak{p}\in\infty} r_{\beta_\mathfrak{p}}(L_\mathfrak{p})=r_\infty(\mathrm{gen}\,L)\cdot|N(m)|^{1/2},$$
а для неархимедовых $\mathfrak{p}$
$$r_{\beta_\mathfrak{p}}(L_\mathfrak{p})=N(\mathfrak{p})^{-2k}\cdot\#\{\bar{y}\in L/\mathfrak{p}^kL^\#\mid\bar{y}\ni\bar{x}:(\bar{x},L_\mathfrak{p})\in\beta_\mathfrak{p}\}$$
при достаточно большом k. Поэтому из предложения 4 следует
$$\rho(\mathrm{spn}\,L,m)=\sum_\alpha\chi^K_{aF^{*2}}(L)\cdot\eta^K(\alpha)\cdot r_\alpha(\mathrm{gen}\,L)=$$
$$=\chi^K_{aF^{*2}}(L)\prod_\mathfrak{p}\sum_{\beta_\mathfrak{p}}\eta^K_\mathfrak{p}(\beta_\mathfrak{p})\,r_{\beta_\mathfrak{p}}(L_\mathfrak{p})= \tag{6}$$
$$=\chi^K_{aF^{*2}}(L)\prod_\mathfrak{p}\rho_\mathfrak{p}(K_\mathfrak{p},m),$$
где
$$\rho_\mathfrak{p}(K_\mathfrak{p},m)=N(\mathfrak{p})^{-2k}\sum_{\bar{x}\in K_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^kK^\#_\mathfrak{p},\ Q(\bar{x})\equiv m(\mathrm{mod}\,\mathfrak{p}^k)}\eta_\mathfrak{p}(\bar{x})$$
при достаточно большом k; $\eta_\mathfrak{p}(\bar{x})$ определяется следующим образом: пусть $\Sigma_\mathfrak{p}\in O^+(V_\mathfrak{p})$, $\Sigma_\mathfrak{p}\bar{x}_m\equiv\bar{x}$. Тогда $\eta_\mathfrak{p}(\bar{x})=1$, если $\theta(\Sigma_\mathfrak{p})\subset\mathfrak{N}_\mathfrak{p}(-da)$ и $\eta_\mathfrak{p}(\bar{x})=-1$ в противном случае.

Вместо $\Theta(\Sigma_\mathfrak{p})$ можно взять $Q(\bar{x}_m-\bar{x})$ и считать $\eta_\mathfrak{p}(\bar x)=1$, если $Q(\bar x_m-\bar x)\equiv 0$ (при достаточно большом k это определение корректно). При $\mathfrak{p}\nmid 2mu(K)^{-1}$ все представления m эквивалентны над $K_\mathfrak{p}$, поэтому

$$\rho_\mathfrak{p}(K_\mathfrak{p},m)=\pm R_\mathfrak{p}(K_\mathfrak{p},m)\quad \left(=\pm\sum r_{g_\mathfrak{p}}(K_\mathfrak{p})\right);$$

для архимедовых $\mathfrak{p}$

$$\rho_\mathfrak{p}(K_\mathfrak{p},m)=r_\mathfrak{p}(K_\mathfrak{p},m).$$

Замечание 5. Хотя знак $\eta_\mathfrak{p}(\bar x)$, а значит и $\rho_\mathfrak{p}(K_\mathfrak{p},m)$, зависит от выбора $\bar x_m$, их произведение от этого выбора не зависит. Специальный выбор $\bar x_m$ нужен нам только для того, чтобы было справедливо следующее утверждение:

Предложение 5. Если $m\in aF^{*2}$, $m\in u(K_\mathfrak{p}^\#)^{-1}\mathfrak{r}(-da)^{-2}$, $s\in\sigma_\mathfrak{p}$, то

$$\rho_\mathfrak{p}(K_\mathfrak{p},ms^2)=\left(\frac{-da}{s\sigma_\mathfrak{p}}\right)_*\rho_\mathfrak{p}(K_\mathfrak{p},m). \qquad (7)$$

Доказательство. Возьмем такое вполне вещественное поле F' с простым главным идеалом $\mathfrak{p}'$, что $F'_{\mathfrak{p}'}\simeq F_\mathfrak{p}$, и такую решетку K' во вполне положительном F'-пространстве, что $K'_{\mathfrak{p}'}$ и $K_\mathfrak{p}$ изометричны. В силу рассмотрений § 2 для K' справедлива теорема А (без уточнения коэффициентов при функциях H). Ввиду (6) отсюда следует, что (7) справедливо для $K'_{\mathfrak{p}'}$, а значит и для $K_\mathfrak{p}$. Предложение 5 доказано.

Из предложения 5 и формулы (6) следует теорема А в полной общности. Для коэффициентов c получаем выражение

$$c^K_{aF^{*2},1}(\mathrm{gen}\,K)=\prod_\mathfrak{p}\left(\rho_\mathfrak{p}(K_\mathfrak{p},m_1)-\left(\frac{-da}{\mathfrak{p}}\right)_*\rho_\mathfrak{p}(K_\mathfrak{p},m_2)\right),$$

где $m_1,m_2\in aF_\mathfrak{p}^{*2}$, $(m_1)_\mathfrak{p}=\mathfrak{a}(a)\mathfrak{r}^2\sigma_\mathfrak{p}$, $(m_2)_\mathfrak{p}=\mathfrak{a}(a)\mathfrak{r}^2\mathfrak{p}^{-2}\sigma_\mathfrak{p}$.

Замечание 6. Коэффициенты χ и c в теореме А зависят от выбора решетки K в рассматриваемом роде. Хотелось бы иметь возможность канонически выбирать эту решетку (или хотя бы набор спинорных родов $\bigcap\limits_{aF^{*2}\subset\mathfrak{T}(\mathrm{gen}\,L)}\mathrm{Ker}\,\chi_{aF^{*2}}\cdot K$).

Опишем, следуя [5], один из возможных подходов. Назовем число m слабым спинорным исключением для $\mathrm{gen}\,L$, если $\rho(\mathrm{spn}\,L,m)\neq 0$ (в силу (6) это определение корректно). Выберем максимальную систему независимых (см. [5]) слабых спинорных исключений $a_1,\dots,a_s$. Тогда набор "сверхрегулярных" спинорных родов $\bigcap\limits_{aF^{*2}\subset\mathfrak{T}(\mathrm{gen}\,L)}\mathrm{Ker}\,\chi_{aF^{*2}}\cdot K$ определяется условием $c^K_{aF^{*2},\mathfrak{r}_a}(\mathrm{gen}\,L)>0$ для $a=a_1,\dots,a_s$ и максимального (по включению) идеала $\mathfrak{r}_a$ с условием $c^K_{aF^{*2},\mathfrak{r}_a}(\mathrm{gen}\,L)\neq 0$ (в силу (6) $\mathfrak{r}_a$ единственен).

Характеры $\chi^K_{aF^{*2}}$, $a=a_1,\dots,a_s$, обобщают "частичные инварианты спинорного рода" [5]. Эта система является независимой, но, вообще говоря, не полной системой инвариантов. Однако она является максимальной с точки зрения представления чисел спинорными родами, т.е. если $M\in\mathrm{gen}\,L$, то $R(\mathrm{spn}\,M,m)=R(\mathrm{spn}\,L,m)$ для всех $m\in F^*$ тогда и только тогда, когда $\chi^K_{aF^{*2}}(M)=\chi^K_{aF^{*2}}(L)$ для $a=a_1,\dots,a_s$.

Отметим, что выбор "сверхрегулярных" решеток все еще не является каноническим, поскольку он определяется выбором системы $a_1F^{*2},\dots,a_sF^{*2}$.

§ 5. Неаналитический подход.

Доказанное в § 4 предложение 5 является чисто локальным утверждением. Поэтому хотелось бы доказать его локальными методами, не привлекая теории модулярных форм. Например, если $\left(\frac{-da}{\mathfrak{p}}\right)_*=1$, то $\rho_\mathfrak{p}(K_\mathfrak{p},m)=R_\mathfrak{p}(K_\mathfrak{p},m)$, и точные формулы для этой величины (а значит, и предложение 5) можно получить, используя суммы Гаусса (для $F=\mathbb{Q}$ это проделано в гл.3 монографии [1]). Эту технику, вероятно, можно применить и к общему случаю. Точные формулы для $\rho_\mathfrak{p}(K_\mathfrak{p},m)$, по-видимому, можно получить и чисто элементарными локальными методами, тщательно перебирая все возможные случаи (ср. [20]). Получение таких формул позволило бы в явном виде выписывать значения коэффициентов $c_{aF^{*2},t}$.

В этом параграфе мы дадим набросок локального доказательства ослабленного варианта предложения 5, из которого будет следовать теорема В § I (также в несколько ослабленном варианте).

Итак, пусть выполнены условия теоремы В. В силу соотношения $\rho(\mathrm{spn}\,L, ms^2, ts) = \rho(\mathrm{spn}\,L, m, t)$ мы можем без ограничения общности считать, что $s=1$, а в силу предложения 4 – что $m \in \mathfrak{T}(\mathrm{gen}\,L)$. Тогда точно так же, как в § 4, получаем

$$\rho(\mathrm{spn}\,L,m,t)=\prod_{\mathfrak{p}}\sum_{\beta_{\mathfrak{p}}=\mathfrak{X}(\bar{x},M_{\mathfrak{p}}):\ t_{M_{\mathfrak{p}}}(\bar{x})=t\sigma_{\mathfrak{p}}} \eta^{L}_{\mathfrak{p}}(\beta_{\mathfrak{p}})\cdot r_{\beta_{\mathfrak{p}}}(L_{\mathfrak{p}}) = \prod_{\mathfrak{p}} \rho_{\mathfrak{p}}(\mathrm{spn}\,L,m,t). \quad (8)$$

Предложение 6. Пусть $m \in \mathfrak{n}(L_{\mathfrak{p}})t^2\mathfrak{f}^2$ и $|mt^{-2}\mathfrak{f}^{-2}|_{\mathfrak{p}}<|2^5\mathfrak{n}(L^{\#})^{-1}|_{\mathfrak{p}}$, если $\mathfrak{p}|(2\mathfrak{n}(L^{\#})^{-1}\mathfrak{n}(L)^{-1}_{;}\mathfrak{f})$; $a \in \sigma_{\mathfrak{p}}$, $|a|_{\mathfrak{p}}=|\mathfrak{f}|_{\mathfrak{p}}$. Тогда существует биекция φ_a множества классов представлений $\mathfrak{X}(\bar{x},L_{\mathfrak{p}})$ с условием $Q(\bar{x})=m$, $t_{L_{\mathfrak{p}}}(\bar{x})=t\mathfrak{f}$ на множество классов представлений с условием $Q(\bar{x})=m$, $t_{L_{\mathfrak{p}}}(\bar{x})=t$, обладающая свойствами:

I) если $\varphi_a\mathfrak{X}(\bar{x},L_{\mathfrak{p}})=\mathfrak{X}(\bar{y},L_{\mathfrak{p}})$ и $\bar{y}=\Sigma_{\mathfrak{p}}\bar{x}$,
то $\theta(\Sigma_{\mathfrak{p}})=aF_{\mathfrak{p}}^{*2}$;

2) $r_{\varphi_a\beta}(L_{\mathfrak{p}})=r_{\beta}(L_{\mathfrak{p}})\cdot\left(1-\left(\frac{-dm}{\mathfrak{p}}\right)_{*}\frac{1}{N(\mathfrak{p})}\right)$,
если $\mathfrak{p}|\mathfrak{f}$, $\mathfrak{p}\nmid 2\mathfrak{n}(L^{\#})^{-1}\cdot(m)t^{-2}\mathfrak{f}^{-2}\mathfrak{n}(L)^{-2}$,
$r_{\varphi_a\beta}(L_{\mathfrak{p}})=r_{\beta}(L_{\mathfrak{p}})$, иначе.

В случае $\mathfrak{p}\nmid 2\mathfrak{n}(L^{\#})^{-1}\mathfrak{n}(L)^{-1}$ доказательство предложения 6 совсем просто: часть I фактически известна – см., например, [8] , а часть 2 сразу следует из формулы для числа решений квадратичного сравнения. В случае $\mathfrak{p}|2\mathfrak{n}(L^{\#})^{-1}\mathfrak{n}(L)^{-1}$ доказательство отличается чисто техническими усложнениями.

Из предложения 6 уже совсем просто получается

Предложение 7. В условиях предложения 6

$$\rho_{\mathfrak{p}}(\mathrm{spn}\,L,m,t)=\rho_{\mathfrak{p}}(\mathrm{spn}\,L,m,t\mathfrak{f})\cdot\left(\frac{-dm}{\mathfrak{f}\sigma_{\mathfrak{p}}}\right)_{*}\cdot\left(1-\left(\frac{-dm}{\mathfrak{p}}\right)_{*}\frac{1}{N(\mathfrak{p})}\right),$$

если $\mathfrak{p}|\mathfrak{f}$, $\mathfrak{p}\nmid 2\mathfrak{n}(L^{\#})^{-1}(m)t^{-2}\mathfrak{f}^{-2}\mathfrak{n}(L)^{-2}$,

$$\rho_{\mathfrak{p}}(\mathrm{spn}\,L,m,t)=\rho_{\mathfrak{p}}(\mathrm{spn}\,L,m,t\mathfrak{f})\cdot\left(\frac{-dm}{\mathfrak{f}\sigma_{\mathfrak{p}}}\right)_{*}\ , \text{ иначе.}$$

Отсюда ввиду (8) следует несколько ослабленный вариант части 3 теоремы В:

Предложение 8. Если в условиях теоремы В $|mt^{-2}\mathfrak{f}^{-2}|_{\mathfrak{p}}<|2^5\mathfrak{n}(L^{\#})^{-1}|_{\mathfrak{p}}$ для всех $\mathfrak{p}|(2\mathfrak{n}(L^{\#})^{-1}\mathfrak{n}(L)^{-1}_{;}s\mathfrak{f})$,то справедлива формула (4).

Литература

I. Малышев А.В. О представлении целых чисел положительными квадратичными формами. – Труды Мат. ин-та АН СССР, I962, т.65, 2I2 с.

2. Сулаквелидзе Л.А. О числе представлений чисел некоторыми регулярными и полурегулярными тернарными квадратичными формами, принадлежащими многоклассным родам.П.-Труды Тбилисского Мат. ин-та, I983, т.72, с.55-67.

3. Тетерин Ю.Г. О представлении целых алгебраических чисел тернарными квадратичными формами. – Зап. науч. семин. ЛОМИ, I983, т. I2I, с.I57-I68.

4. Тетерин Ю.Г. О представлении чисел тернарными квадратичными формами над максимальными порядками алгебраических числовых полей. – JCM 82. Short communications (Abstacts) I, p.53.

5. Benham J.W., Hsia J.S. On spinor exceptional representations. - Nagoya Math.J., 1982, v.87, p.247-260.

6. Cassels J.W.S. Rationale quadratische Formen. - Jber.d. Dt.Math. - Verein., 1980, Bd.82, S.81-93.

7. Cipra B.A. On the Niva-Shintani theta-kernel lifting of modular forms. - Nagoya Math.J., 1983, v.91, p.49-117.
8. Earnest A.G. Congruence conditions on integers represented by ternary quadratic forms. - Pacific J.Math., 1980, v.90, p.325-333.
9. Eichler M. Quaternäre quadratische Formen und die Riemannsche Vermutung für die Kongruenzzetafunktion. - Archiv Math., 1954, v.5, S.355-366.
10. Flicker Y. Automorphic forms on covering groups of GL(2). - Invent.Math., 1980, v.57, N 2, p.119-182.
11. Gelbart S., Piatetski-Shapiro J.J. Distinguished representations and modular forms of half-integral weight. - Invent. Math., 1980, v.59, N 2, p.145-188.
12. Hsia J.S. Representations by spinor genera. - Pacific J. Math., 1976, v.63, N 1, p.147-152.
13. Hsia J.S. Regular positive ternary quadratic forms. - Mathematica, 1981, v.28, N 2, p.231-238.
14. Jones B.W., Watson G.L. On indefinite ternary quadratic forms. - Canad.J.Math., 1956, v.8, N 4, p.592-608.
15. Kneser M. Darstellungsmasse indefiniter quadratischer Formen. - Math.Z., 1961, Bd.77, N 2, S.188-194.
16. Kneser M. Quadratische Formen. Göttingen: Math.Inst. (Vorlesungsausarbeitung), 1973/74.
17. Kojima H. Cusp forms of weight 3/2. - Nagoya Math.J., 1980, v. 79, p.111-122.
18. O'Meara O.T. Introduction to quadratic forms. Berlin: Springer, 1963, xi+342 p.
19. Peters M. Darstellungen durch definite ternäre quadratische Formen. - Acta arithm., 1977, Bd.34, S.57-80.
20. Schulze-Pillot R. Darstellung durch Spinorgeschlechter ternärer quadratischer Formen. - J.Number Th., 1980, v.12, N 4, p.529-540.
21. Shimura G. On modular forms of half integral weight. - Ann.of Math., 1973, v.97, N 3, p.440-481.

22. Sturm J. Theta series of weight 3/2. - J.Number Th., 1982, v.14, N 3, p.353-361.
23. Vignéras M.-F. Facteurs gamma et équations fonctionnelles.- Lecture Notes in Math., 1977, v.627, p.79-103.
24. Waldspurger J.L. Sur les coefficients de Fourier des formes modularies de poids demi-entier. - J.Math.pures et appl., 1981, v.60, N 4, p.375-484.

РТП ЛИЯФ, зак.205, тир.220, уч.изд.л.0,9; 5/III-1984г., М-10784

Бесплатно