On the other hand, we can write

$$C_k(a, u) = \sum_{i=1}^{u} d_i Q_i^{-1} = P_u/Q_u,$$

with an integer $P_u \geqslant 1$. One may justify $(P_u, a_j) = 1$ for $j = 1,..., u-1$ by a simple computation. From this follows immediately $(P_u, Q_u) = 1$ and so we have $P_u = p_n$, $Q_u = q_n$.

Furthermore $(-1)^n = d_{u+1}$ is true because of the assumption on the length of $C_k(a, u)$. Therefore

$$\alpha = C_k(a, u) + d_{u+1}/a_u Q_u^{k-2} Q_u^2 = C_k(a, u) + d_{u+1}/a_u Q_u^k = C_k(a, u+1).$$

This completes the verification of the last case. The other cases can be verfied applying (2).

References

1. G. H. Hardy and E. M. Wright, "An Introduction to the Theory of Numbers," Clarendon, Oxford, 1971.
2. G. Köhler, Some more predictable continued fractions, *Mh. Math.* **89** (1980), 95–100.
3. A. Schinzel, Continued fractions for some transcendental numbers, delivered at the meeting "Diophantische Approximationen" in Oberwolfach, 1979.
4. Th. Schneider, "Einführung in die Transzendenten Zahlen," Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1957.
5. J. Shallit, Simple continued fraction for some irrational numbers, *J. Number Theory* **11** (1979), 209–217.
6. V. G. Sprindzuk, "Metrical Theory of Diophantine Approximation," Nauka, Moscow, 1977. [in Russian].

JOURNAL OF NUMBER THEORY **14**, 237–250 (1982)

Darstellung Durch Definite Ternäre Quadratische Formen

Rainer Schulze-Pillot

Mathematisches Institut der Georg-August-Universität, Bunsenstraße 3/5, D-3400 Göttingen, West Germany

Communicated by M. Kneser

Received March 11, 1980

We study the representation behaviour of a $\mathbb{Z}$-lattice L on a positive definite ternary quadratic space V over $\mathbb{Q}$. As a new tool for this we use the Bruhat–Tits building of the spingroup of the completion of V at a suitable prime p. In Section 2 we show how this can be described in an elementary way as a graph whose vertices are the $\mathbb{Z}_p$-maximal lattices on V_p, and in Section 4 we let this graph induce a graph, whose vertices are lattices on V, which differ from L only at the prime p. In Section 3 we investigate which lattices from the graph defined in Section 2 have a given vector in common. The results are used in Sections 5 and 6 to obtain information on the representation behaviour of some special lattices. In Section 5 we get a list of lattices, which represent all numbers they represent locally everywhere; this list contains that given by Watson in [16]. In Section 6 we sharpen a result of Jones and Pall from [6].

Einleitung

Ein $\mathbb{Z}$-Gitter L auf einem positiv definiten quadratischen Raum V der Dimension 3 über $\mathbb{Q}$ stellt bekanntlich nicht notwendig alle Zahlen dar, die von all seinen Komplettierungen dargestellt werden, und für die Bestimmung der Ausnahmezahlen kennt man kein allgemeines Verfahren. Selbst die Endlichkeit ihrer Anzahl (unter gewissen zusätzlichen Einschränkungen) ist nur unter Annahme einer Verallgemeinerung der Riemannschen Vermutung bewiesen [13], und der Beweis liefert auch keine obere Schranke für diese Anzahl. Man ist daher nach wie vor auf Untersuchungen in Einzelfällen angewiesen, wobei von besonderem Interesse diejenigen Gitter sind, die alle Zahlen darstellen, welche sie lokal überall darstellen, oder, was dasselbe ist, welche von einem Gitter in ihrem Geschlecht dargestellt werden. Sie werden z.B. von Jones und Pall in [6] und von Watson in [16] behandelt. Hier soll ein Teil der Ergebnisse aus diesen beiden Untersuchungen neu bewiesen und

0022-314X/82/020237-14$02.00/0

ergänzt werden, wobei wir als neues Hilfsmittel das Bruhat–Tits–Gebäude der Spingruppe der Lokalisierung von V nach einer geeigneten Primzahl benutzen. In Section 2 wird gezeigt, wie man dieses in elementarer Weise als einen Graphen beschreiben kann, dessen Ecken die $\mathbb{Z}_p$-maximalen Gitter auf V_p sind, und in Section 4 wird der so erhaltene Graph ins Globale übertragen, indem man Gitter auf V betrachtet, die sich nur an der Stelle p voneinander unterscheiden. In Section 3 wird untersucht, welchen Gittern aus dem in Section 2 definierten Graphen ein gegebener Vektor gemeinsam ist. Die dort erhaltenen Ergebnisse lassen nach Übertragung ins Globale mitunter Rückschlüsse auf das Darstellungsverhalten von L zu. Wir erhalten in Section 5 eine Liste von Gittern, welche alle Zahlen darstellen, die sie lokal überall darstellen; sie enthält die von Watson in [16] aufgeführten Gitter, sowie eine Reihe weiterer. In Section 6 werden einige Gitter aus [6] behandelt; das dort festgestellte Darstellungsverhalten wird dabei zum Teil neu bewiesen und die möglichen Ausnahmezahlen werden weiter eingeschränkt.

Die Arbeit ist eine Zusammenfassung meiner Dissertation [15], die unter Anleitung von Prof. M. Kneser entstand. Ihm möchte ich für zahlreiche Anregungen herzlich danken.

1. Bezeichnungen

Für die quadratische Form q und die zugehörige Bilinearform B auf einem quadratischen Modul M gilt $q(x+y)=q(x)+q(y)+B(x,y)$. Ist M frei mit Basis $e_1,\dots,e_n$ und $n=2m+1$ ungerade, so ist $\det(B(e_i,e_j))=2P_n(q(e_i), B(e_i,e_j))$, wo P_n ein Polynom mit ganzrationalen Koeffizienten in den Veränderlichen X_i und X_{ij} $(i\neq j)$ ist; nach [10] nennen wir die Quadratklasse von $(-1)^m P_n(q(e_i), B(e_i,e_j))$ die Halbdiskriminante von M, bezeichnet mit $\operatorname{disc}(M)$. Ist $n=2m$ gerade, so bezeichnen wir mit $\operatorname{disc}(M)$ die Quadratklasse von $(-1)^m \det(B(e_i,e_j))$. Mit $\mathfrak{n}(M)$ bezeichnen wir das von den $q(x)$ $(x\in M)$ erzeugte Ideal; $\mathbb{Z}_p$-Maximalität eines Gitters heißt Maximalität unter der Bedingung $\mathfrak{n}(M)\subseteq\mathbb{Z}_p$. Die übrigen Bezeichnungen, die nicht erklärt werden, lehnen sich an [12] an.

2. Der Lokale Graph

In diesem Abschnitt sei p eine feste Primzahl, V ein regulärer quadratischer Raum der Dimension 3 über $\mathbb{Q}_p$. Bekanntlich [5, Satz 9.6] gibt es bis auf Isomorphie nur ein $\mathbb{Z}_p$-maximales Gitter auf V, L sei ein solches. V sei so, daß L ein halbregulärer quadratischer $\mathbb{Z}_p$-Modul (im Sinne von [10]) ist, d.h., für die Halbdiskriminante $\operatorname{disc}(L)$ gilt $\operatorname{disc}(L)\subseteq\mathbb{Z}_p^\times$; V ist dann notwendig isotrop [10, Satz 14.7]. Für zwei $\mathbb{Z}_p$-maximale Gitter L, M auf V ist dann $(L:L\cap M)=(M:L\cap M)=p^n$ für ein $n\in\mathbb{N}$; wir können daher definieren:

Definition 1. Sind L, M $\mathbb{Z}_p$-maximale Gitter auf V, $(L:L\cap M)=(M:L\cap M)=p^n$, so schreiben wir $d(L,M):=n$. $d(L,M)$, heißt der Abstand von L und M, ist $d(L,M)=1$, so heißen L und M benachbart.

Ähnlich wie in [8] lassen sich zwei $\mathbb{Z}_p$-maximale Gitter auf V durch eine Kette zueinander benachbarter Gitter verbinden:

Lemma 1. (i) *Ist* $x\in p^{-1}L$, $x\notin L$, $q(x)\in\mathbb{Z}_p$ *und* $L_x:=\{y\in L \mid B(y,x)\in\mathbb{Z}_p\}$, $L_1:=L_x+\mathbb{Z}_p x$, *so ist* L_1 $\mathbb{Z}_p$*-maximal und* $d(L,L_1)=1$.

(ii) *Ist zusätzlich* $x'\in p^{-1}L$, $x'\notin L$, $q(x')\in\mathbb{Z}_p$ *und* $L_{x'}, L_1'$ *analog zu* (i) *definiert, so ist* $L_1=L_1'$ *genau dann, wenn es* $c\in\mathbb{Z}_p$ *gibt mit* $cx-x'\in L$.

(iii) *Ist* M *ein weiteres* $\mathbb{Z}_p$*-maximales Gitter auf* V *und gilt zusätzlich zu den Voraussetzungen von* (i) *noch* $x\in M$, *so ist* $d(L_1,M)=d(L,M)-1$.

(iv) *Ist* M *wie in* (iii), *so gibt es Gitter* $L_0=L$, $L_1,\dots,L_n=M$ $(n=d(L,M))$ *mit* $d(L_i,L_{i+1})=1$.

Beweis. Wäre $B(x,L)\subseteq\mathbb{Z}_p$, so wäre $L\subset L_1$ im Widerspruch zur Maximalität von L, also gilt $B(x,L)=p^{-1}\mathbb{Z}_p$, und hieraus folgt $(L:L_x)=p$. Daher ist $\operatorname{disc}(L_x)\subseteq p^2\mathbb{Z}_p^\times$, und da $\operatorname{disc}(L_1)\subseteq\mathbb{Z}_p$ gilt, folgt $(L_1:L_x)\leqslant p$, also $(L_1:L_x)=p$, $\operatorname{disc}(L_1)\subseteq Z_p^\times$. L_1 ist also $\mathbb{Z}_p$-maximal [5, Satz 9.3], und wegen $L_x=L\cap L_1$ gilt (i). Zu (ii): Ist $x'=cx+y$ mit $y\in L$, $c\in\mathbb{Z}_p^\times$, so ist $y\in L_x$, da $q(x)$, $q(x')$ und $q(y)$ in $\mathbb{Z}_p$ liegen; also gilt $x'\in L_1$. Weiter sieht man, daß für $y'\in L$ wegen $c\in Z_p^\times$ gilt: $B(x,y')\in\mathbb{Z}_p \Leftrightarrow B(x',y')\in\mathbb{Z}_p$, also $L_{x'}=L_x$ und daher auch $L_1'=L_1$. Ist umgekehrt $L_1'=L_1$, so ist $x'=y+cx$ $(y\in L,\ c\in\mathbb{Z}_p)$, und wegen $x'\notin L$ folgt $c\in Z_p^\times$. Zu (iii): In diesem Fall ist $M\cap L_1=M\cap L_x+\mathbb{Z}_p x\supseteq M\cap L_x=M\cap L$. Sind $z_i=y_i+c_i x\in M\cap L_1$ $(i=1,2,\ c_i\in\mathbb{Z}_p,\ y_i\in L_x)$, so gilt $z_1-z_2\in M\cap L\Leftrightarrow c_1-c_2\in p\mathbb{Z}_p$, also ist $(M\cap L_1:M\cap L)=p$, und daraus folgt die Behauptung. (iv) folgt durch wiederholte Anwendung von (iii).

Lemma 2. *Die Bezeichnungen seien wie in Lemma* 1, *es gelte* $x\in M$.

(i) *Ist* $x'\in L+M$, *so ist* $L_1'=L_1$.

(ii) *Ist* $x'\notin L+M$, *so ist* $d(M,L_1')=d(M,L)+1$.

Beweis. Zu (i): Nach Lemma 1(i) kann man ohne Einschränkung $x'\in M$ annehmen. Es gibt eine Basis $\{e_1,e_2,e_3\}$ von L mit $q(e_1)=q(e_2)=0$, $B(e_1,e_2)=1$, e_3 senkrecht zu e_1 und e_2, so daß $\{p^r e_1, p^s e_2, p^t e_3\}$ mit gewissen $r,s,t\in\mathbb{Z}$ eine Basis von M ist [5, Satz 9.5]. Da L und M $\mathbb{Z}_p$-

maximal sind, folgt $t=0$, $r=-s$. Betrachtet man diese Basis, so sieht man: $(M\cap p^{-1}L : M\cap L)=p$. Daraus folgt wegen $M\cap p^{-1}L\subseteq M\cap L_1\subset M\cap L$, daß $M\cap p^{-1}L=M\cap L_1$ gilt, und ebenso folgt $M\cap p^{-1}L=M\cap L_1'$. Also gilt $x\in L_1'$, und wegen Lemma 1(iii) folgt $L_1'=L_1$.

Zu (ii): Ist $z=y+cx'\in M\cap L_1'$ ($y\in L_{x'}$, $c\in\mathbb{Z}_p$), so ist $c\in p\mathbb{Z}_p$ und daher $z\in L_{x'}\cap M$, denn andernfalls wäre $x'=c^{-1}z-c^{-1}y\in L+M$. Weiter gilt $M\cap L_{x'}\neq M\cap L$. Andernfalls wäre nämlich $x'\in(L\cap M)^{\#}=L^{\#}+M^{\#}$ ($L^{\#}$ das zu L duale Gitter). Im Fall $p\neq 2$ ist dies wegen $M^{\#}=M$, $L^{\#}=L$ [12, 82:14b] unmöglich. Ist $p=2$ und sind $\{e_1,e_2,e_3\}$, $\{2^r e_1, 2^{-r}e_2, e_3\}$ ($r\in\mathbb{N}$) die oben erwähnten Basen von L und M, so ist $L^{\#}+M^{\#}=\mathbb{Z}_2 e_1+\mathbb{Z}_2(2^{-r}e_2)+\mathbb{Z}_2(e_3/2)$. Wäre nun $x'=c_1e_1+c_2 2^{-r}e_2+c_3e_3/2\in L^{\#}+M^{\#}$ ($c_i\in\mathbb{Z}_2$), so müßte wegen $x'\notin L+M$ gelten: $c_3\in\mathbb{Z}_2^{\times}$, und wegen $x'\in 2^{-1}L$ würde $c_2=2^{r-1}c_2'$ ($c_2'\in\mathbb{Z}_2$) folgen; daraus ergibt sich aber ein Widerspruch zu $q(x')\in\mathbb{Z}_2$. Es gilt also $M\cap L_{x'}\neq M\cap L$, und ähnlich wie in (i) hat man $M\cap L_1'=M\cap pL$, $(M\cap L : M\cap L_1')=p$, also die Behauptung.

Satz 1. *Sei X der Graph, dessen Ecken die $\mathbb{Z}_p$-maximalen Gitter auf V sind, und in dem zwei Ecken L und M genau dann durch eine gemeinsame Kante verbunden sind, wenn $d(L,M)=1$ gilt.*

(i) *X ist ein Baum (d.h., ein zusammenhängender Graph ohne Kreise), für zwei Ecken L, M ist $d(L,M)$ die Länge des kürzesten Weges von L nach M in X.*

(ii) *Jede Ecke L hat genau $p+1$ Nachbarn in X, diese entsprechen umkehrbar eindeutig den isotropen Geraden in L/pL.*

Beweis (für die verwendeten graphentheoretischen Begriffe siehe [1, Annexe] oder [14, Kap. I]). (i) folgt sofort aus Lemma 1 und Lemma 2. Zu (ii): Man zählt leicht ab, daß es in $\bar V:=L/pL$ (mit der modulo p reduzierten quadratischen Form) genau $p+1$ isotrope Geraden gibt. Ist M zu L benachbart, $x\in M\cap p^{-1}L$ mit $M=L_x+\mathbb{Z}_p x$, so ist $\mathbb{F}_p(\overline{px})$ eine isotrope Gerade in V, die nach Lemma 1(ii) unabhängig von der Auswahl von x ist, und diese Zuordnung ist (ebenfalls nach Lemma 1(ii)) injektiv. Ist andereseits $\bar z\in\bar V$ ein isotroper Vektor, $z\in L$ ein Repräsentant und $z=c_1e_1+c_2e_2+c_3e_3$ ($c_i\in\mathbb{Z}_p$) bezüglich der Basis aus dem Beweis von Lemma 2, so kann nicht gleichzeitig $c_1\in p\mathbb{Z}_p$ und $c_2\in p\mathbb{Z}_p$ gelten, da dann wegen $q(z)\in p\mathbb{Z}_p$ auch $c_3\in p\mathbb{Z}_p$ wäre, also $\bar z=0$ gälte. Sei also etwa $c_2\in\mathbb{Z}_p^{\times}$ und $a:=q(e_3)$, $z':=(-c_2^{-1}c_3^2a)\,e_1+c_2e_2+c_3e_3$, so ist $z-z'\in pL$ und $q(z')=0$, mit $x:=p^{-1}z'$ kann man also den Nachbarn $M:=L_x+\mathbb{Z}_p x$ von L bilden, und unter der obigen Zuordnung wird M die Gerade $\mathbb{F}_p\bar z$ zugeordnet. Die Zuordnung ist also auch surjektiv, und damit ist alles gezeigt.

Bemerkung 1. In [14] untersucht Serre das Bruhat–Tits–Gebäude für $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ (dort als "l'arbre de SL_2" bezeichnet). Dies ist ein Graph T, dessen Ecken die Homothetieklassen $\bar K$ von Gittern K auf einem zweidimensionalen Vektorraum W über $\mathbb{Q}_p$ sind. Nun sind bekanntlich (da V isotrop ist) die zweite Cliffordalgebra $C^+(V)$ von V und $M_2(\mathbb{Q}_p)$ isomorph [5, Sect. 5.2], und man kann den Isomorphismus $\Phi: M_2(\mathbb{Q}_p)\to C^+(V)$ so wählen, daß $M_2(\mathbb{Z}_p)$ auf $C^+(L)$ abgebildet wird, ferner wird $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ auf $\mathrm{Spin}(V)$ abgebildet. Ist nun K ein festes Gitter auf W und $M_2(\mathbb{Q}_p)$ mit $\mathrm{End}(W)$ bezüglich einer Basis von K identifiziert, so kann man durch $\Phi_*: \overline{AK}\mapsto \Phi(A)\,L\Phi(A)^{-1}$ eine Abbildung $\Phi_*: |T|\to|X|$ definieren, denn man rechnet leicht nach, daß aus $\overline{AK}=\overline{BK}$ folgt, daß $\Phi(A)\,L\Phi(A)^{-1}=\Phi(B)\,L\Phi(B)^{-1}$ gilt. Man rechnet ebenfalls nach (für die Einzelheiten siehe [15, Sect. 3]), daß diese Abbildung bijektiv ist und den Abstand erhält. Die Abbildung Φ induziert also einen Isomorphismus des Graphen T auf den Graphen X, der mit den Operationen von $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ bzw. $C^+(V)^{\times}$ auf T bzw. X verträglich ist. Man sieht also, daß der Graph X nichts anderes ist als das Bruhat–Tits–Gebäude der Spingruppe.

Bemerkung 2. Die bisherigen Ergebnisse gelten analog, wenn man statt $\mathbb{Q}_p$ einen beliebigen lokalen Körper betrachtet. Man muß nur p an den richtigen Stellen durch die Ordnung p^f des Restklassenkörpers ersetzen; z.B. hat in X dann jede Ecke genau p^f+1 Nachbarn.

3. Gemeinsame Vektoren benachbarter Gitter

Die Bezeichnungen sind wie in Section 2. Wir wollen in diesem Abschnitt für $y\in L$ untersuchen, welche Nachbarn von L den Vektor y ebenfalls enthalten. Allgemeiner fragen wir: Welche Gestalt hat X_y, wo X_y der zu $\{M\in|X| \,\|\, y\in M\}$ gehörige volle Untergraph von X (im folgenden auch der zu y gehörige Untergraph von X genannt) ist?

Lemma 3. *X_y ist zusammenhängend.*

Beweis. Verbindet man zwei Gitter $M, M'\in|X|$ nach Lemma 1(iv) durch eine Kette $M_1,\ldots,M_r$ zueinander benachbarter Gitter, so ist nach Konstruktion $M\cap M'$ in allen M_i enthalten.

Lemma 4. *$y\in L$ sei ein maximaler Vektor, $q(y)\in p\mathbb{Z}_p$. Dann gibt es genau einen Nachbarn L' von L in X, der y enthält. Ist $q(y)\notin p^2\mathbb{Z}_p$, so sind L und L' die einzigen Gitter in $|X|$, die y enthalten.*

Beweis. Die Nachbarn von L entsprechen nach Satz 1 den isotropen Geraden in $\bar V=L/pL$, dabei entsprechen diejenigen Nachbarn von L, die y enthalten, Geraden $\mathbb{F}_p\bar x$ mit $\bar B(\bar x,\bar y)=0$. Die Gerade $\mathbb{F}_p\bar y$ erfüllt diese

Bedingung offenbar. Wäre $\bar{x}$ ein von $\bar{y}$ linear unabhängiger Vektor aus $\bar{V}$ mit $\bar{q}(\bar{x})=0$, $\bar{B}(\bar{x},\bar{y})=0$, so könnte man $\bar{x},\bar{y}$ zu einer Basis von $\bar{V}$ ergänzen und einen Widerspruch zur Halbregularität von $\bar{V}$ erhalten, indem man die Halbdiskriminante bezüglich dieser Basis ausrechnete. Ist $q(y)\notin p^2\mathbb{Z}_p$, so gilt diese Überlegung für jedes y enthaltende Gitter aus $|X|$, und weil X_y zusammenhängend ist, folgt die Behauptung.

LEMMA 5. *Sei $y\in L$, $q(y)\in\mathbb{Z}_p^{\times}$, $B(y,L)=2\mathbb{Z}_p$.*

(i) *Ist $(\mathbb{Q}_p y)^{\perp}$ anisotrop, $L'\in|X|$ mit $y\in L'$ und $B(y,L')=2\mathbb{Z}_p$, so ist $L'=L$.*

(ii) *Ist $(\mathbb{Q}_p y)^{\perp}$ eine hyperbolische Ebene, so hat L in X genau zwei Nachbarn L_1, L_2 mit $y\in L_i$, $B(y,L_i)=2\mathbb{Z}_p$.*

Beweis. Ist $L'\in|X|$ mit $y\in L'$, $B(y,L')=2\mathbb{Z}_p$, so läßt y sich orthogonal abspalten, $L'=\mathbb{Z}_p y\perp M'$, wo M' ein $\mathbb{Z}_p$-maximales Gitter auf $(Q_p y)^{\perp}$ ist. Im Fall (i) gibt es nur ein Z_p-maximales Gitter auf $(\mathbb{Q}_p y)^{\perp}$ [12, 91:11], im Fall (ii) sei $L=\mathbb{Z}_p y\perp M$ und $\{e_1,e_2\}$ eine Basis für M mit $q(e_1)=q(e_2)=0$, $B(e_1,e_2)=1$. Dann sind die $\mathbb{Z}_p$-maximalen Gitter auf $(\mathbb{Q}_p y)^{\perp}$ von der Gestalt $\mathbb{Z}_p(p^n e_1)+\mathbb{Z}_p(p^{-n}e_2)$ $(n\in\mathbb{Z})$; dies liefert für $n=\pm 1$ die Nachbargitter L_1, L_2.

LEMMA 6. *Sei $p=2$, $y\in V$ mit $q(y)=:a\in\mathbb{Z}_2^{\times}$. Dann gilt: Es gibt genau dann ein Gitter $M\in|X|$ mit $y\in M$ und $B(y,M)=2\mathbb{Z}_2$, wenn $a\in\operatorname{disc}(V)$ oder $a\in 5\operatorname{disc}(V)$ gilt.*

Beweis. Erfüllt M die obigen Bedingungen, so kann man $M=N\perp\mathbb{Z}_2 y$ mit einem $\mathbb{Z}_2$-maximalen regulären Gitter N auf $(\mathbb{Q}_2 y)^{\perp}$ schreiben. Hieraus folgt [12, 93:11] $\operatorname{disc}(\mathbb{Q}_2 N)=(\mathbb{Q}_2^{\times})^2$ oder $\operatorname{disc}(\mathbb{Q}_2 N)=5(\mathbb{Q}_2^{\times})^2$, also wegen $a\operatorname{disc}(V)=\operatorname{disc}(\mathbb{Q}_2 N)$ die Notwendigkeit der Bedingung. Ist $\{e_1,e_2,e_3\}$ die schon früher benutzte Basis von L, $q(e_3)=:b\in\operatorname{disc}(V)$, $z=2e_1+2be_2+e_3$, so gilt $q(z)=:b'\in 5\operatorname{disc}(V)$, und wegen $B(z,L)=2\mathbb{Z}_2$ läßt z sich orthogonal abspalten, $L=\mathbb{Z}_2 z\perp K$. Ist $a\in\operatorname{disc}(V)$ bzw. $a\in 5\operatorname{disc}(V)$, so läßt sich ohne Einschränkung $b=a$ bzw. $b'=a$ annehmen. Wählt man dann nach dem Wittschen Satz $\varphi\in O(V)$ mit $\varphi(e_3)=y$ bzw. $\varphi(z)=y$, so ist $M:=\varphi(L)$ das gesuchte Gitter.

LEMMA 7. *Sei $p=2$, $y\in L$ mit $q(y)=a\in\mathbb{Z}_2^{\times}$, $B(y,L)=\mathbb{Z}_2$. Dann gibt es genau einen Nachbarn L' von L in X, der y enthält. Für diesen gilt $B(y,L')=2\mathbb{Z}_2$ genau dann, wenn $a\in\operatorname{disc}(V)$ oder $a\in 5\operatorname{disc}(V)$ gilt. Ist das nicht der Fall, so sind L' und L die einzigen Gitter in $|X|$, die y enthalten.*

Beweis. Das orthogonale Komplement $\{\bar{y}\}^{\perp}$ von $\bar{y}$ in $\bar{V}=L/2L$ ist eine Hyperebene $\bar{H}$, die $\bar{y}$ enthält, also sicher nicht regulär ist. Enthielte sie zwei linear unabhängige isotrope Vektoren, so müßten diese orthogonal zueinander sein, und wie in Lemma 4 ergäbe sich ein Widerspruch zur Halbregularität von $\bar{V}$. Andererseits enthält $\bar{H}$ einen isotropen Vektor, denn ist $\bar{z}\in\bar{H}$ anisotrop, so ist $\bar{q}(\bar{z}+\bar{y})=0$. L hat daher genau einen Nachbarn L' in X, der y enthält. Gilt $B(y,L')=\mathbb{Z}_2$, so gilt obiges Argument auch für L', und wie bei Lemma 4 folgt, daß L' und L die einzigen Gitter in $|X|$ sind, die y enthalten. Wegen Lemma 6 kann das für $a\in\operatorname{disc}(V)$ oder $a\in 5\operatorname{disc}(V)$ nicht wahr sein, so daß die Behauptung folgt.

SATZ 2. *Sei $y\in L$ mit $q(y)=a\notin p^2\mathbb{Z}_p$. Dann gilt:*

(i) *Ist $p\neq 2$, $a\in\mathbb{Z}_p^{\times}$, $a\notin\operatorname{disc}(V)$, so besteht X_y aus einem Punkt.*

(ii) *Ist $p\neq 2$, $a\in\mathbb{Z}_p^{\times}$, $a\in\operatorname{disc}(V)$, so ist X_y eine Gerade.*

(iii) *Ist p beliebig, $a\in p\mathbb{Z}_p^{\times}$, so besteht X_y aus zwei miteinander verbundenen Punkten.*

(iv) *Ist $p=2$, $a\in\mathbb{Z}_2^{\times}$ und $a\in 3\operatorname{disc}(V)$ oder $a\in 7\operatorname{disc}(V)$, so besteht X_y aus zwei miteinander verbundenen Punkten.*

(v) *Ist $p=2$, $a\in\mathbb{Z}_2^{\times}$, $a\in 5\operatorname{disc}(V)$, so besteht X_y aus vier Punkten, von denen einer mit den drei anderen verbunden ist.*

(vi) *Ist $p=2$, $a\in\mathbb{Z}_2^{\times}$, $a\in\operatorname{disc}(V)$, so besteht X_y aus einer Geraden sowie zusätzlich zu jedem Punkt der Geraden einem weiteren Punkt, der mit ihm verbunden ist.* (*Siehe Fig.* 1.)

Bemerkung 3. Für $q(y)\in p^2\mathbb{Z}_p$ läßt sich die Gestalt von X_y aus Satz 2 ableiten, indem man sukzessiv $p^{-r}y,\ldots,p^{-1}y, y$ betrachtet $(\operatorname{ord}_p(q(y))=2r$ oder $2r+1)$.

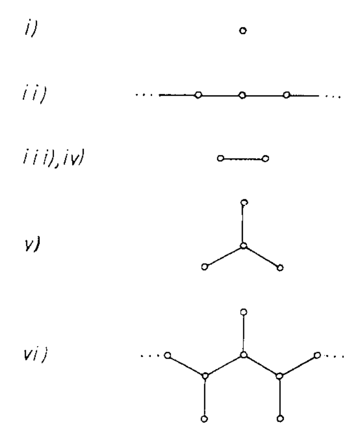

FIG. 1. Gestalt von X_y in den Fällen von Satz 2.

Bemerkung 4. Lemma 4 bis Lemma 7 zeigen speziell, daß für $p=2$ jeder Vektor $y \in L$ in wenigstens einem Nachbarn von L in X enthalten ist.

Bemerkung 5. Wie in Bemerkung 2 gelten die Ergebnisse dieses Paragraphen auch noch, wenn man $\mathbb{Q}_p$ durch einen lokalen Körper ersetzt und zusätzlich verlangt, daß in dessen Hauptordnung $\mathfrak{o}$ die Zahl 2 eine Einheit oder ein Primelement ist. Ohne diese Voraussetzung tritt der Fall $2\mathfrak{o} \subset B(y, L) \subseteq \mathfrak{p}$ hinzu, der schwieriger zu behandeln ist.

4. Übertragung ins Globale

In diesem Paragraphen sei V ein dreidimensionaler regulärer quadratischer Raum über $\mathbb{Q}$. Wir wollen durch den Graphen aus Section 2 einen Graphen induzieren, dessen Ecken gewisse $\mathbb{Z}$-Gitter auf V sind.

Satz 3. *Sei L ein Gitter auf V, p eine Primzahl, so daß L_p ein halbregulärer quadratischer $\mathbb{Z}_p$-Modul ist. Dann ist L_p ein $\mathbb{Z}_p$-maximales Gitter auf V_p, und man kann einen Graphen $Z(L,p)$ wie folgt definieren:*

Die Ecken von $Z(L,p)$ sind die Gitter M auf V aus dem Geschlecht von L mit $M_{p'} = L_{p'}$ für alle Primzahlen $p' \neq p$, zwei Ecken M und M' werden genau dann durch eine Kante verbunden, wenn in dem zu V_p gehörigen Graphen X (nach Section 2) M_p und M'_p benachbart sind. In diesem Fall schreiben wir auch $d(M, M', p) = 1$ und nennen M und M' benachbart. Für $Z(L,p)$ gilt genau wie für X: Jede Ecke hat genau $p+1$ Nachbarn. Ferner gilt: Für $y \in L$, $M \in |Z(L,p)|$ ist $y \in M$ genau dann, wenn $y \in M_p$ gilt. Bezeichnet man mit $Z_y(L,p)$ den vollen Untergraphen von $Z(L,p)$ zu $\{M \in |Z(L,p)| \mid y \in M\}$, so übertragen sich die Ergebnisse über X_y von Section 3 auf $Z_y(L,p)$.

Beweis. Dies folgt aus den bekannten Tatsachen über Lokalisierungen von Gittern.

Satz 4. *Seien L, p wie in Satz 3. Dann enthält $Z(L,p)$ Gitter aus allen Klassen im Spinorgeschlecht von L. Ist M in derselben Klasse wie L, so ist die Verteilung der Nachbarn von M auf die Klassen in* $\mathrm{gen}(L)$ *die gleiche wie bei L.*

Beweis. Der erste Teil folgt nach [10, 24.3], der zweite wegen $d(L, K, p) = d(\varphi(L), \varphi(K), p)$ für $\varphi \in O(V)$.

Satz 5. *Seien L, p wie in Satz 3, $\mathfrak{n}(L) \subseteq \mathbb{Z}$, M ein Nachbar von L in $Z(L,p)$. Dann gilt: Es gibt $x \in p^{-1}L$ mit $x \notin L$, $q(x) \in \mathbb{Z}$ und $M = L_x + \mathbb{Z}x$ ($L_x := \{y \in L \mid B(y,x) \in \mathbb{Z}\}$). Umgekehrt führt jedes solche x auf diese Weise zu einem Nachbarn von L. Die Nachbarn von L in $Z(L,p)$ entsprechen den isotropen Geraden in L/pL.*

Beweis. Dies folgt aus den gleichen Eigenschaften für den lokalen Graphen X aus Section 2, wenn man beachtet, daß L dicht in L_p ist.

5. Darstellung und $Z(L, 2)$

Auch in diesem Abschnitt sei V ein dreidimensionaler regulärer quadratischer Raum über $\mathbb{Q}$, der zusätzlich als positiv definit vorausgesetzt wird. L sei ein Gitter auf V, so daß die Komplettierung L_2 ein halbregulärer quadratischer $\mathbb{Z}_2$-Modul ist, ferner gelte $\mathfrak{n}(L) \subseteq \mathbb{Z}$. Für $K \in \mathrm{gen}(L)$ bezeichne $N(L, K, 2)$ die Anzahl der Nachbarn von L in $Z(L, 2)$, die in der Klasse von K liegen.

Satz 6. *Sei* $\mathrm{gen}(L) = \mathrm{spn}(L)$, *das Geschlecht von L bestehe aus zwei Klassen. Dann gilt: Wird $a \in \mathbb{Z}$ vom Geschlecht von L dargestellt und ist $a \in \mathrm{disc}(V_2)$ oder $a \in 5\ \mathrm{disc}(V_2)$, so wird a von L dargestellt.*

Beweis. Wegen der Halbregularität von L_2 ist $a = 2^{2r}a'$ mit ungeradem a', und auch a' wird vom Geschlecht von L dargestellt; K sei ein Gitter aus $|Z(L,2)|$ mit $y \in K$, $q(y) = a'$. Wegen Lemma 6 gibt es $M \in |Z(L,2)|$ mit $y \in M$ und $B(y, M) \subseteq 2\mathbb{Z}$; y liegt dann in allen Nachbarn von M. Da das Geschlecht von L nur aus zwei Klassen besteht, ist entweder M oder einer seiner Nachbarn aus der Klasse von L, denn sonst gäbe es in $Z(L, 2)$ im Widerspruch zu Satz 4 nur Gitter einer Klasse. L stellt also a' und damit erst recht a dar.

Satz 7. *Unter den Voraussetzungen von Satz 6 bestehe das Geschlecht von L aus den Klassen von L und K. Dann gilt: Ist $N(K, L, 2) = 3$, so stellt L alle Zahlen dar, die von* $\mathrm{gen}(L)$ *dargestellt werden. Ist zusätzlich $N(L, K, 2) = 1$, so stellt L alle Zahlen primitiv dar, die von* $\mathrm{gen}(L)$ *primitiv dargestellt werden.*

Beweis. Nach Satz 4 gibt es in $|Z(L, 2)|$ Gitter beider Klassen aus dem Geschlecht, wir können also ohne Einschränkung $K \in |Z(L, 2)|$, $d(L, K, 2) = 1$ annehmen. Wird a nun (primitiv) von K dargestellt, so sei $y \in K$ ein (maximaler) Vektor mit $q(y) = a$. Nach Bemerkung 4 und Satz 3 liegt y in wenigstens einem Nachbarn L' von K in $Z(L, 2)$. Da nach Voraussetzung $N(K, L, 2) = 3$ gilt, ist $L' \in \mathrm{cls}(L)$, L stellt also a dar. Sei nun zusätzlich $N(L, K, 2) = 1$, y maximal in K. Ist y auch maximal in L', so sind wir fertig, andernfalls gilt $y' := y/2 \in L'$; nach Voraussetzung ist $y' \notin K$. Nach den Ergebnissen von Section 3 und Satz 3 liegt y' entweder in allen Nachbarn von L' oder in genau einem, und da $y' \notin K$ gilt, ist letzteres der Fall. Wegen $N(L', K, 2) = 1$ gibt es also einen Nachbarn $L'' \in \operatorname{cls}(L)$ von L' mit $y' \notin L''$. Da aber y in allen Nachbarn von L' liegt, ist y ein maximaler Vektor in L'', d.h., L'' und damit L stellt a primitiv dar.

Um den vorigen Satz besser anwenden zu können, stellen wir einen Zusammenhang zwischen den Zahlen $N(L, K, 2)$ und den Einheitengruppen von L und K her.

LEMMA 8. *Sei $K \in |Z(L, 2)|$ mit $d(L, K, 2) = 1$. Dann gilt: Ist $\#O(L) \neq \#O(K)$, so ist $N(L, K, 2) = (O(L) : O(L) \cap O(K))$.*

Beweis. Ist $\varphi \in O(L)$, so ist $d(L, \varphi(K), 2) = d(L, K, 2) = 1$, und die Anzahl der Nachbarn K' von L, für die es ein $\varphi \in O(L)$ gibt mit $\varphi(K) = K'$ ist $(O(L) : O(L) \cap O(K))$. Ferner gilt: Ist $\psi \in O(V)$, so gibt es $\varphi \in O(L)$ mit $\psi(K) = \varphi(K)$ genau dann, wenn $\psi \in O(L)\, O(K)$ gilt. Ist $N(L, K, 2) \neq (O(L) : O(L) \cap O(K))$, so gibt es also $\psi \in O(V)$, $\psi \notin O(L)\, O(K)$, so daß $\psi(K)$ ein Nachbar von L in $Z(L, 2)$ ist. Dann ist $\psi^{-1}(L)$ ein Nachbar von K in $Z(L, 2)$, $\psi^{-1} \notin O(K)\, O(L)$, also $N(K, L, 2) \neq (O(K) : O(L) \cap O(K))$. Wir können daher ohne Einschränkung $\#O(L) > \#O(K)$ annehmen, indem wir, falls nötig, L und K vertauschen. Da nach dem eingangs gesagten $(O(L) : O(L) \cap O(K))$ jedenfalls nicht größer als die Anzahl der Nachbarn von L sein kann, kann dieser Index nur die Werte 1, 2, 3 annehmen. Ist er gleich 3, so ist offenbar $N(L, K, 2) = (O(L) : O(L) \cap O(K)) = 3$. Sei nun $(O(L) : O(L) \cap O(K)) = 2$. Dann muß wegen der Voraussetzung $\#O(L) > \#O(K)$ gelten: $O(K) = O(L) \cap O(K)$, also $O(K) \subseteq O(L)$. Wäre nun $N(L, K, 2) > 2$, so gäbe es $\psi \in O(V)$ mit $\psi \notin O(L)$, $\psi(K) \in |Z(L, 2)|$, $d(L, \psi(K), 2) = 1$. Sei $\tau \in O(L)$, $\tau \notin O(K)$, $\rho \in O(L)$ beliebig, dann ist $\tau(K)$ ein von K und $\psi(K)$ verschiedener Nachbar von L in $Z(L, 2)$, und $\rho\psi(K)$ ist ebenfalls ein Nachbar von L. Wäre $\rho\psi(K) = K$ oder $\rho\psi(K) = \tau(K)$, so würde $\psi \in O(L)$ folgen, also muß $\rho\psi(K) = \psi(K)$ für alle $\rho \in O(L)$ gelten. Das ist aber wegen $\#O(L) > \#O(K) = \#O(\psi(K))$ unmöglich, die Annahme $N(L, K, 2) > 2$ führt also auf einen Widerspruch.

Im folgenden bezeichnen wir mit $(a_{11}/2, a_{22}/2, a_{33}/2, a_{23}, a_{13}, a_{12})$ ein Gitter mit der Matrix (a_{ij}).

KOROLLAR 1. *Das Gitter $(1, 1, 3, 1, 0, 0)$ mit der Halbdiskriminante -11 stellt alle Zahlen dar, die von seinem Geschlecht dargestellt werden. Jedes Gitter aus Tabelle* I *stellt alle Zahlen primitiv dar, die von seinem Geschlecht primitiv dargestellt werden.*

Beweis. Alle aufgeführten Gitter liegen nach den Tabellen von Brandt und Intrau [3] in zweiklassigen Geschlechtern. Da außer den Gittern Nr. 7, 8, 13, 14 aus obiger Tabelle für alle aufgeführten Gitter die Halbdiskriminante keinen Primteiler in dritter Potenz enthält, folgt nach

TABELLE I

Nr.	Gitter	Halbdiskriminante
1	(1, 2, 2, 1, 0, 0)	−15
2	(1, 2, 3, 2, 0, 1)	−17
3	(1, 2, 3, 0, 0, 1)	−21
4	(1, 3, 4, 0, 1, 0)	−45
5	(1, 3, 6, 3, 0, 0)	−63
6	(1, 4, 5, 0, 0, 1)	−75
7	(1, 3, 12, 3, 0, 0)	−135
8	(2, 2, 9, 0, 0, 1)	−135
9	(1, 2, 21, 0, 0, 1)	−147
10	(2, 2, 15, 0, 0, 1)	−225
11	(3, 5, 6, 1, 2, 3)	−289
12	(3, 6, 7, 0, 0, 3)	−441
13	(1, 4, 45, 0, 0, 1)	−675
14	(5, 6, 6, 3, 0, 0)	−675

Satz 5 aus [7], daß in diesen Fällen Spinorgeschlecht und Geschlecht zusammenfallen. Für die Gitter Nr. 7, 8, 13, 14 muß man nach [7] und [4] die Spinornormen der lokalen Einheitengruppen bestimmen und anschließend mit Satz 2 aus [7] die Anzahl der Spinorgeschlechter im Geschlecht berechnen. Dies soll hier nicht im einzelnen durchgeführt werden; es ergibt sich in allen Fällen, daß Geschlecht und Spinorgeschlecht zusammenfallen. Für alle aufgeführten Gitter ist ferner die Komplettierung an der Stelle 2 ein halbregulärer quadratischer $\mathbb{Z}_2$-Modul. Sei nun L das jeweils behandelte Gitter, K ein Repräsentant der anderen Klasse in $\operatorname{gen}(L)$. Dann ist nach [3] im ersten Fall $2\, \#O(K) = 3\, \#O(L)$, in den Fällen aus Tabelle I ist $\#O(K) = 3\, \#O(L)$. Nach Lemma 8 folgt in allen Fällen $N(K, L, 2) = 3$, in allen Fällen aus Tabelle I folgt zusätzlich $N(L, K, 2) = 1$. Nach Satz 7 folgt die Behauptung.

Bemerkung 6. Das Resultat von Korollar 1 ist für $(1, 1, 3, 1, 0, 0)$ und die ersten drei Formen aus Tabelle I auf anderem Wege schon von Watson in [16] bewiesen worden. Dort wird sogar gezeigt, daß dies bei quadratfreier Halbdiskriminante die einzigen positiv definiten ternären Gitter mit der angegebenen Eigenschaft sind. Tabelle I enthält alle positiv definiten ternären Gitter der Halbdiskriminante > -1000, für die der Beweis von Korollar 1 möglich ist. Berechnet man für kleinere Halbdiskriminanten die Ordnungen der Einheitengruppen (etwa nach [2]), so lassen sich auf die gleiche Weise möglicherweise weitere Beispiele gewinnen. Deren Anzahl ist jedoch notwendig endlich, da der Beweis von Korollar 1 davon abhängt, daß es nur zwei Klassen im Geschlecht des Gitters gibt, nach [11] und [9] aber aus der Siegelschen Maßformel folgt, daß es zu gegebenem Rang und gegebener

Anzahl der Klassen im Geschlecht stets nur endlich viele Klassen positiv definiter Gitter gibt.

6. DARSTELLUNG UND $Z(L,p)$ FÜR $p \neq 2$

Als Beispiel für die Anwendung des Graphen $Z(L,p)$ auch für $p \neq 2$ bei der Untersuchung des Darstellungsverhaltens betrachten wir die Geschlechter der Gitter $(1, 2, 32, 0, 0, 0)$ und $(1, 8, 32, 0, 0, 0)$, beweisen das in [6] für sie hergeleitete Darstellungsverhalten neu und verschärfen die dortigen Aussagen noch. Hierfür untersuchen wir zunächst das Gitter $L \cong (1, 32, 32, 0, 0, 0)$, das in beiden Gittern als Untergitter enthalten ist.

LEMMA 9. *Das Gitter* $L \cong (1, 32, 32, 0, 0, 0)$ *liegt in einem Geschlecht, das aus zwei Spinorgeschlechtern besteht. Die Klassen dieses Geschlechts sind* $L, K \cong (4, 17, 17, 2, 4, 4)$ *und* $M \cong (4, 9, 32, 0, 0, 4)$, *dabei bilden* L *und* K *das eine,* M *das andere Spinorgeschlecht. Alle Zahlen, die vom Geschlecht von* L, *aber nicht von allen Spinorgeschlechtern in diesem Geschlecht dargestellt werden, sind Quadrate ganzer Zahlen.*

Beweis. Aus Platzgründen wird hier auf den (rechnerischen) Beweis (siehe [15, Sect. 7]) verzichtet.

KOROLLAR 2. *Die Gitter* $L' \cong (1, 2, 32, 0, 0, 0)$ *und* $L'' \cong (1, 8, 32, 0, 0, 0)$ *stellen alle Zahlen dar, die von dem jeweiligen Geschlecht dargestellt werden.*

Beweis. Unter Ausnutzung von Lemma 9 erhält man dies mit etwas Rechnung, siehe [15, Sect. 7] sowie [6].

SATZ 8. (i) *Das Geschlecht von* $L' \cong (1, 2, 32, 0, 0, 0)$ *besteht aus den Klassen von* L' *und* $M' \cong (2, 4, 9, 4, 0, 0)$. M' *stellt alle Zahlen dar, die vom Geschlecht dargestellt werden, außer* 1 *und einigen Zahlen, die kongruent zu* 3 *modulo* 8, *zu* 0 *oder* 1 *modulo* 3 *und zu* 0, 2 *oder* 3 *modulo* 5 *sind und keinen Primteiler quadratisch enthalten.*

(ii) *Das Geschlecht von* $L'' \cong (1, 8, 32, 0, 0, 0)$ *besteht aus den Klassen von* L'' *und* $M'' \cong (4, 8, 9, 0, 4, 0)$. M'' *stellt alle Zahlen dar, die vom Geschlecht dargestellt werden, außer der Zahl* 1.

Beweis. Für die jeweils erste Aussage von (i) und (ii) siehe [3, 6]. Daß M' und M'' die Zahl 1 nicht darstellen, ist offensichtlich, Rechnung zeigt ferner, daß M' die Zahlen 3, 43, 163 und 907 nicht darstellt [6, S. 181]; Berechnung mit einem elektronischen Computer ergab, daß dies die einzigen Ausnahmezahlen unterhalb 1 Million sind. Ob M' weitere Zahlen nicht

darstellt, die obigen Bedingungen genügen, ist nicht bekannt. M' bzw. M'' stellt lokal wie global die gleichen geraden Zahlen dar wie $(2, 4, 36, 8, 0, 0)$ bzw. $(4, 8, 36, 0, 8, 0)$; diese Gitter liegen in einklassigen Geschlechtern [3], stellen also alle Zahlen dar, die sie lokal überall darstellen, für gerade Zahlen folgt also die Behauptung. Aus Lemma 9 folgt, daß das Untergitter $M \cong (4, 9, 32, 0, 4, 0)$ von M' und M'' alle ganzen Zahlen darstellt, die kongruent zu 1 modulo 8 und keine Quadrate sind, dies gilt also erst recht für M' und M''. Wenn wir jetzt noch zeigen, daß M' und M'' alle Zahlen darstellen, die vom jeweiligen Geschlecht dargestellt werden und von wenigstens einer Primzahl quadratisch geteilt werden, so sind wir bis auf die Aussagen über das Verhalten modulo 3 und modulo 5 fertig (diese treten für M'' nicht auf, da die Komplettierung M''_2 nur Zahlen darstellt, die kongruent zu 1 modulo 8 sind). Sei also etwa $a \in q(\mathrm{gen}(M'))$ (die Aussage für M'' folgt genauso), p ungerade mit $p^2 \mid a$. Wir können $Z(M', p)$ betrachten, und da $\mathrm{gen}(M')$ nur zwei Klassen enthält, können wir ohne Einschränkung $d(L', M', p) = 1$ annehmen, also $pL' \subseteq M'$. Da auch a/p^2 von allen Komplettierungen von M' dargestellt wird, gilt $a/p^2 \in q(L')$ oder $a/p^2 \in q(M')$, in jedem Fall folgt $a \in q(M')$. Zum Schluß sei $a \in q(\mathrm{gen}(M'))$, $a \equiv 2 \bmod 3$, $y \in L'$ mit $q(y) = a$. Die Gitter in $Z(L', 3)$, die y enthalten, bilden wegen Lemma 5(i) eine Gerade in $Z(L', 3)$, die nur durch Gitter aus der Klasse von L' verläuft, falls $a \notin q(M')$ gilt. Ist $\{e_1^{(0)}, e_2^{(0)}, e_3\}$ eine Basis von L', bezüglich der L' die angegebene Matrix hat, so rechnet man nach, daß die einzige Gerade durch L' in $Z(L', 3)$, die nur durch Gitter aus der Klasse von L' geht, von den Gittern

$$L^{(n)} = Ze_1^{(n)} + Ze_2^{(n)} + Ze_3 \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

mit

$$3e_1^{(n)} = e_1^{(n-1)} - 2e_2^{(n-1)} = e_1^{(n+1)} + 2e_2^{(n+1)},$$
$$3e_2^{(n)} = 4e_1^{(n-1)} + e_2^{(n-1)} = -4e_1^{(n+1)} + e_2^{(n+1)}$$

gebildet wird. Setzt man daher $y = c_1^{(n)}e_1^{(n)} + c_2^{(n)}e_2^{(n)} + c_3 e_3$ $(c_1^{(n)}, c_2^{(n)}, c_3 \in \mathbb{Z})$, so erhält man hieraus

$$3c_1^{(n+1)} = c_1^{(n)} - 4c_2^{(n)}, \qquad 3c_2^{(n+1)} = 2c_1^{(n)} + c_2^{(n)},$$
$$3c_1^{(n-1)} = c_1^{(n)} + 4c_2^{(n)}, \qquad 3c_2^{(n-1)} = -2c_1^{(n)} + c_2^{(n)}.$$

Hieraus folgt durch Induktion nach r, daß $c_1^{(n)} \equiv c_2^{(n)} \equiv 0 \bmod 3^r$ für alle $r \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$ gilt, also $c_1^{(n)} = c_2^{(n)} = 0$ ist $(n \in \mathbb{Z})$. Es gilt also $a = 32c_3^2$, eine solche Zahl wird aber von M' offensichtlich dargestellt. Die Behauptung für $a \equiv \pm 1 \bmod 5$ folgt auf die gleiche Weise durch Untersuchung von $Z(L', 5)$.

Bemerkung 7. Eventuell läßt sich das Ergebnis durch Betrachtung weiterer Primstellen noch verschärfen, doch wächst hierbei der Rechenaufwand erheblich an.

LITERATUR

1. N. BOURBAKI, "Groupes et algèbres de Lie," Chap. IV, Hermann, Paris, 1969.
2. H. BRANDT, Über die Reduktion der positiven ternären quadratischen Formen, *Math. Nachr.* **9** (1953), 249–254.
3. H. BRANDT UND O. INTRAU, "Tabellen reduzierter positiver ternärer quadratischer Formen," Akademie-Verlag, Berlin, 1959.
4. A. G. EARNEST UND J. S. HSIA, Spinor norms of local integral rotations, II, *Pacific J. Math.* **61** (1975), 71–86.
5. M. EICHLER, "Quadratische Formen und orthogonale Gruppen," Springer, Berlin/Heidelberg/New York, 1974.
6. B. W. JONES UND G. PALL, Regular and semi-regular positive ternary quadratic forms, *Acta Math.* **70** (1940), 165–191.
7. M. KNESER, Klassenzahlen indefiniter quadratischer Formen in drei oder mehr Veränderlichen, *Arch. Math. (Basel)* **7** (1956), 323–332.
8. M. KNESER, Klassenzahlen definiter quadratischer Formen, *Arch. Math. (Basel)* **8** (1957), 241–250.
9. M. KNESER, Klassenzahlen quadratischer Formen, *Jber. Deutsch. Math.-Verein.* **61** (1958), 76–88.
10. M. KNESER, "Quadratische Formen," Vorlesungsausarbeitung, Göttingen, 1974.
11. W. MAGNUS, Über die Anzahl der in einem Geschlecht enthaltenen Klassen von positiv definiten quadratischen Formen, *Math. Ann.* **114** (1937), 465–475 (Berichtigung dazu *Math. Annalen* **115** (1938), 643–644).
12. O. T. O'MEARA, "Introduction to Quadratic Forms," Springer, Berlin/Heidelberg/New York, 1973.
13. M. PETERS, Darstellungen durch definite ternäre quadratische Formen, *Acta Arith.* **34** (1977), 57–80.
14. J.-P. SERRE, Arbres, amalgames, SL_2, *Astérisque* **46** (1977).
15. R. SCHULZE-PILLOT, "Darstellung durch definite ternäre quadratische Formen und das Bruhat–Tits-Gebäude der Spingruppe," Dissertation, Universität Göttingen, 1979.
16. G. L. WATSON, Regular positive ternary quadratic forms, *J. London Math. Soc.* (2) **13** (1976), 97–102.

JOURNAL OF NUMBER THEORY **14**, 251–259 (1982)

On the Rational Equivalence of Full Decomposable Forms

S. GURAK

Department of Mathematics, University of San Diego, San Diego, California 92110

Communicated by O. Taussky Todd

Received March 20, 1980; revised September 6, 1980

Let k be any finite normal extension of the rational field Q and fix an order D of k invariant under the galois group $G(k/Q)$. Consider the set F of the full decomposable forms which correspond to the invertible fractional ideals of D. In a recent paper the author has given arithmetic criteria to determine which classes of improperly equivalent forms in F integrally represent a given positive rational integer m. These criteria are formulated in terms of certain integer sequences which satisfy a linear recursion and need only be considered modulo the primes dividing m. Here, for the most part, we consider partitioning F under rational equivalence. It is a found that the set of rationally equivalent classes in F is a group under composition of forms analogous to Gauss' and Dirichlet's classical results for binary quadratic forms. This leads us to give criteria as before to determine which classes of rationally equivalent forms in F rationally represent m. Moreover, by applying the genus theory of number fields, we find arithmetic criteria to determine when everywhere local norms are global norms if the Hasse norm principle fails to hold in k/Q.

1. INTRODUCTION

Let k be any finite normal extension of the rational field Q with Galois group $G_0 = G(k/Q)$. Let D be any given order of k invariant under G_0 and consider the set F of the full decomposable forms which correspond to the invertible fractional ideals of D [9, Section 3]. In a recent paper [9] the author has given arithmetic criteria to determine which classes of improperly equivalent forms in F integrally represent a given positive rational integer m. These criteria are formulated in terms of certain integer sequences which satisfy a linear recursion and need only be considered modulo the primes dividing m. Here, for the most part, we consider partitioning F under rational equivalence. It is found that the set of rationally equivalent classes in F is a group under composition of forms analogous to Gauss' and Dirichlet's classical results for binary quadratic forms. This leads us to give criteria as before to determine which classes of rationally equivalent forms in F rationally represent m. Moreover, by applying the genus theory of number

0022-314X/82/020251–09$02.00/0