JOURNAL OF NUMBER THEORY 17, 375–388 (1983)

Petites valeurs de la fonction d'Euler

JEAN-LOUIS NICOLAS

Département de Mathématiques, Université de Limoges, 123 Avenue Albert Thomas, F-87060 Limoges Cedex, France

Communicated by H. Zassenhaus

Received January 24, 1982

Let ϕ be the Euler's function. A question of Rosser and Schoenfeld is answered, showing that there exists infinitely many n such that $n/\phi(n) > e^\gamma \log\log n$, where γ is the Euler's constant. More precisely, if N_k is the product of the first k primes, it is proved that, under the Riemann's hypothesis, $N_k/\phi(N_k) > e^\gamma \log\log N_k$ holds for any $k \geqslant 2$, and, if the Riemann's hypothesis is false this inequality holds for infinitely many k, and is false for infinitely many k.

1. INTRODUCTION

Soit $\phi(n) = n \prod_{p|n} (1 - 1/p)$ la fonction d'Euler. Il est bien connu (cf., par exemple, [1, Chap. 18] ou [2, p. 24]) que l'ordre maximum de la fonction $n/\phi(n)$ est $e^\gamma \log\log n$, où γ est la consante d'Euler, ce qui signifie:

$$\overline{\lim} \frac{n}{\phi(n) \log\log n} = e^\gamma$$

Rosser et Schoenfeld ont démontré dans [3] que pour $n \geqslant 3$, on a

$$n/\phi(n) \leqslant e^\gamma \log\log n + 5/(2 \log\log n)$$

excepté pour $n = 223092870 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$ pour lequel 5/2 doit être remplacé par 2,50637. Ils posent ensuite la question: "Existe-t-il une infinité de n pour lesquels $n/\phi(n) > e^\gamma \log\log n$?" Nous allons démontrer le théorème:

THÉORÈME 1. *Il existe une infinité de n pour lesquels $n/\phi(n) > e^\gamma \log\log n$.*

Ce théorème est une conséquence du théorème plus précis:

THÉORÈME 2. *Soit p_k le k-ième nombre premier et $N_k = 2 \cdot 3 \cdots p_k$ le produit des k premiers nombres premiers.*

0022-314X/83 $3.00

641/17/3-7

(a) *Si l'hypothèse de Riemann est vraie, on a pour tout* $k \geqslant 1$:

$$N_k/\phi(N_k) > e^{\gamma} \log \log N_k \tag{1}$$

(b) *Si l'hypothèse de Riemann est fausse, il existe une infinité de* k *pour lesquels* (1) *est vrai et une infinité de* k *pour lesquels* (1) *est faux.*

Le théorème 2 se déduira facilement du théorème 3:

THÉORÈME 3. *Soit* $\theta(x) = \sum_{p \leqslant x} \log p$ *la première fonction de Tchebychef. On définit pour* $x \geqslant 2$:

$$f(x) = e^{\gamma} \log \theta(x) \prod_{p \leqslant x} (1 - 1/p)$$

(a) *On a pour* $2 \leqslant x \leqslant 10^8$, $f(x) < 1$.

(b) *Si l'hypothèse de Riemann est vraie, on a pour tout* $x \geqslant 2$, $f(x) < 1$; *de plus on a*:

$$\underline{\lim}\, (\log f(x)) \sqrt{x} \log x = \log \pi + 2 \log 2 - 4 - \gamma = -2{,}046...$$

et

$$\overline{\lim}\, (\log f(x)) \sqrt{x} \log x \leqslant \gamma - \log \pi - 2 \log 2 = -1{,}954...$$

(c) *Si l'hypothèse de Riemann est fausse, il existe une suite de valeurs de* x *tendant vers* $+\infty$ *pour lesquelles* $f(x) < 1$, *et une autre suite de valeurs de* x *tendant vers* $+\infty$ *pour lesquelles* $f(x) > 1$. *Et si l'on désigne par* Θ *la borne supérieure des parties réelles des zéros de la fonction* ζ *de Riemann, alors, pour tout* b, *vérifiant* $1 - \Theta < b < 1/2$, *on a* $\log f(x) = \Omega \pm (x^{-b})$, *c'est-à-dire* $\overline{\lim}\, x^b \log f(x) > 0$ *et* $\underline{\lim}\, x^b \log f(x) < 0$.

La démonstration de (a) repose sur les calculs de Rosser et Schoenfeld [3, pp. 72–73]), qui donnent pour $x \leqslant 10^8$:

$$\prod_{p \leqslant x} \frac{p}{p-1} > e^{\gamma} \log x$$

et

$$\theta(x) < x.$$

La démonstration du théorème 2 à partir du théorème 3 se fait en observant que

$$f(p_k) = e^{\gamma} (\log \log N_k) \frac{\phi(N_k)}{N_k}.$$

La démonstration du théorème 3 commence par une estimation de $\log f(x)$ en fonction de $\theta(x)$. Sous l'hypothèse de Riemann on utilise la formule explicite de la théorie des nombres. Dans l'autre cas, on utilise un théorème de Landau classique dans tous les résultats de changement de signe des fonctions usuelles de l'arithmétique. Les résultats du (c) pourraient être précisés suivant les techniques des "Ω-théorèmes"décrites par example dans [4].

Une fonction voisine de $n/\phi(n)$ est $\sigma(n)/n$, où $\sigma(n)$ est la somme des diviseurs de n. On sait que (cf. [2, Chap. 18] ou [2, p. 24]), pour tout n, $\sigma(n)/n \leqslant n/\phi(n)$ et que

$$\overline{\lim} \frac{\sigma(n)}{n \log \log n} = e^{\gamma}.$$

Robin ([5]) a démontré que si l'hypothèse de Riemann est vraie, on a pour tout $n \geqslant 5041$,

$$\sigma(n) \leqslant e^{\gamma} n \log \log n \tag{2}$$

et si l'hypothèse de Riemann est fausse, il existe une infinité de n pour lesquels (2) est faux.

La démonstration de Robin utilise les mêmes idées que pour $n/\phi(n)$, mais nécessite la connaissance des nombres colossalement abondants, introduits par Alaoglu et Erdös (cf. [6]) en suivant l'exemple de Ramanujan qui avait introduit les nombres hautement composés supérieurs pour étudier les grandes valeurs de $d(n) = \sum_{d \mid n} 1$. Dans le cas de $n/\phi(n)$ l'équivalent de ces nombres a une structure très simple: ce sont les nombres N_n.

J'ai plaisir à remercier Montgomery, qui au cours de discussions à Oberwolfach m'a donné l'idée de la proposition 2, et Robin pour plusieurs simplifications dans les démonstrations.

2. Estimation de $f(x)$

On définit la deuxième fonction de Tchebychef $\psi(x) = \sum_{p^m \leqslant x} \log p$ et l'on pose $S(x) = \theta(x) - x$ et $R(x) = \psi(x) - x$.

PROPOSITION 1. *Pour $x \geqslant 121$, on a, en posant*

$$K(x) = \int_x^{\infty} \frac{S(t)}{t^2} \left(\frac{1}{\log t} + \frac{1}{\log^2 t} \right) dt \tag{3}$$

$$K(x) - \frac{S^2(x)}{x^2 \log x} \leqslant \log f(x) \leqslant K(x) + \frac{1}{2(x-1)} \tag{4}$$

Remarque. On sait d'après le théorème des nombres premiers que $S(t) = O(t/\log t)$ et cela assure la convergence de l'intégrale (3).

DÉMONSTRATION. Il résulte d'abord des théorèmes 18 et 4 de [3] que pour $x \geqslant 121$, on a $\theta(x) \geqslant 4x/5$. On remarque ensuite que $-(d^2/dt^2)(\log\log t) = ((1+\log t)/t^2 \log^2 t)$ est une fonction décroissante de t (pour $t > 1$), et que, pour $a > 0$ la fonction $t \mapsto t(t+1-a)/(t-a)^2$ est décroissante pour $t > a$. On en déduit, en faisant $a = \log 5/4$ que pour $x \geqslant 121$, on a

$$\frac{25}{16}\frac{\log 4x/5 + 1}{x^2 \log^2 4x/5} \leqslant \frac{2}{x^2 \log x}$$

et la formule de Taylor appliquée à $\log\log x$ donne:

$$\forall x \geqslant 3, \qquad \log\log\theta(x) \leqslant \log\log x + \frac{S(x)}{x\log x}. \tag{5}$$

$$\forall x \geqslant 121, \qquad \log\log\theta(x) \geqslant \log\log x + \frac{S(x)}{x\log x} - \frac{S^2(x)}{x^2\log x}. \tag{6}$$

Il vient ensuite:

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p} = \int_{2-}^{x}\frac{d[\theta(t)]}{t\log t} = \frac{\theta(x)}{x\log x} + \int_2^x \frac{\theta(t)(\log t + 1)}{t^2\log^2 t}\,dt.$$

Comme $\theta(x) = x + S(x)$, on obtient:

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p} = \frac{S(x)}{x\log x} + \log\log x - \log\log 2 + \frac{1}{\log 2} + \int_2^x \frac{S(t)(\log t+1)}{t^2\log^2 t}\,dt$$

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p} = \frac{S(x)}{x\log x} + \log\log x + B_1 - \int_x^\infty \frac{S(t)(\log t+1)}{t^2\log^2 t}\,dt \tag{7}$$

avec

$$B_1 = \frac{1}{\log 2} - \log\log 2 + \int_2^\infty \frac{S(t)(\log t+1)}{t^2\log^2 t}\,dt.$$

En comparant avec la formule classique: (cf. [1, Chap. 22])

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p} = \log\log x + B_1 + o(1), \tag{8}$$

on sait que $B_1 = \gamma + \sum_p (\log(1-1/p) + 1/p)$.

On pose ensuite:

$$U(x)=\log\log\theta(x)+\sum_{p\leqslant x}\left(-\frac{1}{p}\right)+B_1. \tag{9}$$

On a alors:

$$\log f(x)=U(x)+u(x) \tag{10}$$

avec

$$u(x)=\sum_{p\leqslant x}\log\left(1-\frac{1}{p}\right)+\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}+\gamma-B_1=\sum_{p>x}-\log\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{1}{p}.$$

On a alors pour $u(x)$ l'encadrement:

$$\begin{aligned} &0<u(x)\leqslant\sum_{p>x}\frac{1}{2p^2}(1+1/p+1/p^2+\cdots)\\ &0<u(x)\leqslant\sum_{p>x}\frac{1}{2p(p-1)}\leqslant\sum_{n>x}\frac{1}{2n(n-1)}\leqslant\frac{1}{2(x-1)}\end{aligned} \tag{11}$$

On obtient (4) à l'aide de (10), (9), (7), (5), (6) et (11).

3. Si l'hypothèse de Rieman est vraie

Démontrons d'abord un lemme:

LEMME 1. *Soit ρ un nombre complexe de partie réelle* $1/2$. *On pose*:

$$F_\rho(x)=\int_x^\infty t^{\rho-2}\left(\frac{1}{\log t}+\frac{1}{\log^2 t}\right)dt$$

On a:

$$F_\rho(x)=-\frac{1}{\rho-1}\frac{x^{\rho-1}}{\log x}+r_\rho(x)$$

avec, pour $x>e^2$,

$$|r_\rho(x)|\leqslant\frac{4}{|\rho-1|\sqrt{x}\log^2 x}$$

DÉMONSTRATION. En intégrant par parties, on obtient:

$$F_\rho(x)=-\frac{1}{\rho-1}\frac{x^{\rho-1}}{\log x}+r_\rho(x)$$

avec

$$r_\rho(x) = -\frac{1}{\rho-1}\frac{x^{\rho-1}}{\log^2 x} + \int_x^\infty \frac{1}{\rho-1} t^{\rho-2}\left(\frac{1}{\log^2 t} + \frac{2}{\log^3 t}\right) dt$$

Pour $t \geqslant x > e^2$, on a $\log^3 t \geqslant 2\log^2 x$, et

$$|r_\rho(x)| \leqslant \frac{1}{|\rho-1|\sqrt{x}\log^2 x} + \frac{2}{|\rho-1|\log^2 x}\int_x^\infty t^{-3/2}\, dt$$
$$= \frac{4}{|\rho-1|\sqrt{x}\log^2 x}.$$

PROPOSITION 2. *Soit $R(x) = \psi(x) - x$. On pose:*

$$J(x) = \int_x^\infty \frac{R(t)}{t^2}\left(\frac{1}{\log t} + \frac{1}{\log^2 t}\right) dt. \tag{12}$$

Alors, sous l'hypothèse de Riemann, on a, pour $x \geqslant 55 > e^4$

$$J(x) \leqslant \frac{0,1}{\sqrt{x}\log x}$$

DÉMONSTRATION. On part de la formule explicite de la théorie des nombres premiers (cf. [7, 8] ou [9, p. 74]), valable pour $x > 1$

$$\psi_1(x) = \int_0^x \psi(t)\, dt = \frac{x^2}{2} - \sum_\rho \frac{x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)} - x\frac{\zeta'}{\zeta}(0) + \frac{\zeta'}{\zeta}(-1)$$
$$- \sum_{r=1}^\infty \frac{x^{1-2r}}{2r(2r-1)}. \tag{13}$$

La sommation en ρ porte sur les zéros non triviaux de la fonction ζ de Riemann. La série $\sum_\rho 1/|\rho(\rho+1)|$ est convergente. Soit A sa somme. On pose, pour $t > 0$:

$$g(t) = \frac{1}{t^2}\left(\frac{1}{\log t} + \frac{1}{\log^2 t}\right).$$

On a:

$$g'(t) = -\frac{1}{t^3}\left(\frac{2}{\log t} + \frac{3}{\log^2 t} + \frac{2}{\log^3 t}\right).$$

La série $\sum_\rho g'(t)\, t^{\rho+1}/\rho(\rho+1)$ est absolument convergente pour tout t, et sous l'hypothèse de Riemann, ses sommes partielles sont majorées en module par $A\,|\,g'(t)|\,t^{3/2}$, qui est intégrable sur $[x,+\infty[$, pour $x>1$. D'après le théorème de la convergence dominée, on a:

$$\int_x^{\infty}\left(\sum_{\rho} g'(t)\,\frac{t^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)}\right)dt=\sum_{\rho}\int_x^{\infty} g'(t)\,\frac{t^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)}\,dt \tag{14}$$

Dans la formule (13), posons:

$$g_1(x)=x\,\frac{\zeta'}{\zeta}(0)-\frac{\zeta'}{\zeta}(-1)+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{x^{1-2r}}{2r(2r-1)}$$

On a pour $x>1$, avec la valeur de $(\zeta'/\zeta)(0)$ donnée par [9, p. 66]:

$$g_1'(x)=\log(2\pi)+\tfrac{1}{2}\log(1-1/x^2)$$

et pour $x\geqslant 2$, on a:

$$0\leqslant g_1'(x)\leqslant \log(2\,\pi). \tag{15}$$

Le premier membre de (14) vaut:

$$\int_x^{\infty} g'(t)\left(\frac{t^2}{2}-\psi_1(t)-g_1(t)\right)dt$$

$$=g(x)\left(\psi_1(x)-\frac{x^2}{2}+g_1(x)\right)+J(x)+J_1(x)$$

en intégrant par parties, et en observant que $\psi_1(t)=O(t^2)$, avec

$$J_1(x)=\int_x^{\infty} g(t)\,g_1'(t)\,dt. \tag{16}$$

Le deuxième membre de (14) vaut:

$$\sum_{\rho}\left\{-g(x)\,\frac{x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)}-\int_x^{\infty} g(t)\,\frac{t^{\rho}}{\rho}\,dt\right\}$$

$$=g(x)\left(\psi_1(x)-\frac{x^2}{2}+g_1(x)\right)-\sum_{\rho}\frac{1}{\rho}\,F_{\rho}(x).$$

La formule (14) nous donne donc

$$J(x)=-\sum_{\rho}\frac{1}{\rho}\,F_{\rho}(x)-J_1(x); \tag{17}$$

(16) et (15) donnent, pour $x \geqslant 2$:

$$0 \leqslant J_1(x) \leqslant \log(2\pi) \int_x^{\infty} d\left(\frac{1}{t \log t}\right) = \frac{\log 2\pi}{x \log x}. \tag{18}$$

Ensuite, le lemme 1 nous donne:

$$\begin{aligned} -\sum_\rho \frac{1}{\rho} F_\rho(x) &= \sum_\rho \frac{x^{\rho-1}}{\rho(\rho-1)\log x} - \sum_\rho \frac{r_\rho(x)}{\rho} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}\log x} \sum_\rho \frac{x^{i \operatorname{Im} \rho}}{\rho(\rho-1)} - \sum_\rho \frac{r_\rho(x)}{\rho}. \end{aligned}$$

La première série est normalement convergente; on a: $\rho(1-\rho) > 0$ et [9, p. 159):

$$\sum_\rho \frac{1}{\rho(1-\rho)} = 2 + \gamma - \log \pi - 2 \log 2 \leqslant 0{,}047.$$

On obtient donc, avec l'estimation de $r_\rho(x)$ donnée par le lemme

$$\left| \sum_\rho \frac{1}{\rho} F_\rho(x) \right| \leqslant \frac{0{,}047}{\sqrt{x}\log x}\left(1 + \frac{4}{\log x}\right) \leqslant \frac{0{,}1}{\sqrt{x}\log x}$$

pour $x \geqslant e^4$. La démonstration de la proposition 2 s'achève en considérant (17) et (18).

Démontrons maintenant le théorème 3(b).

Rosser et Schoenfeld donnent (cf. [3, éq. 3.37])

$$\forall x \geqslant 121, \qquad \theta(x) \leqslant \psi(x) - 0{,}98\sqrt{x}.$$

Notons qu'une telle inégalité est facile à obtenir avec un coefficient moins bon, puisque $\psi(x) - \theta(x) \geqslant \theta(\sqrt{x})$. Dans [Ros [10, p. 265], on remplace 0,98 par 0,998.

On a alors $S(x) \leqslant R(x) - 0{,}98\sqrt{x}$, pour $x \geqslant 121$, et la proposition 1 donne avec les notations du lemme 1:

$$\log f(x) \leqslant J(x) - 0{,}98 F_{1/2}(x) + \frac{1}{2(x-1)}, \qquad \forall x \geqslant 121. \tag{19}$$

Le lemme 1 nous donne:

$$F_{1/2}(x) = \frac{2}{\sqrt{x}\log x} + r_{1/2}(x)$$

et pour $x \geqslant 3000 > e^8$, on a $|r_{1/2}(x)| \leqslant 1/\sqrt{x} \log x$ ce qui entraîne $F_{1/2}(x) \geqslant 1/\sqrt{x} \log x$ et

$$-0{,}98 F_{1/2}(x) + \frac{1}{2(x-1)} \leqslant -\frac{0{,}9}{\sqrt{x} \log x} \qquad \text{pour} \quad x \geqslant 3000. \tag{20}$$

L'inégalité (19) et la proposition 2 donnent alors

$$\log f(x) \leqslant -\frac{0{,}8}{\sqrt{x} \log x} \qquad \text{pour} \quad x \geqslant 3000$$

ce qui, avec (a) démontre la première partie de (b) du théorème 3.

Le comportement de f à l'infini s'étudie de façon similaire: Sous l'hypothèse de Riemann, on a $S(x) = O(\sqrt{x} \log^2 x)$ (cf. [8, p. 175]) et la proposition 1 devient:

$$\log f(x) = K(x) + O(\log^3 x/x).$$

On a également $\psi(x) - \theta(x) = \sqrt{x} + O(x^{1/3})$, et le même calcul que ci-dessus donne:

$$\log f(x) = \frac{-1}{\sqrt{x} \log x} \left(2 + \sum_\rho \frac{x^{i \operatorname{Im} \rho}}{\rho(1-\rho)}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{x} \log^2 x}\right).$$

Par le principe des tiroirs de Dirichlet, on peut montrer (cf. [8, p. 203]) que

$$\overline{\lim_{x \to +\infty}} \left(\sum_\rho \frac{x^{i \operatorname{Im} \rho}}{\rho(1-\rho)}\right) = \sum_\rho \frac{1}{\rho((1-\rho)}$$

et cela achève la démonstration de (b) du théorème 3.

Les méthodes actuelles de l'analyse ne permettent pas de calculer exactement $\underline{\lim}(\sum_\rho x^{i \operatorname{Im} \rho}/\rho(1-\rho))$. On peut cependant montrer que cette limite inférieure est <0. (cf. [8, p. 195]).

4. Si l'hypothèse de Riemann est fausse

Démontrons d'abord que $f(x)$ n'est pas toujours $\geqslant 1$ à partir d'un certain x_0. Avec (19) et (20), et les notations de la proposition 2, il suffit de démontrer que $J(x)$ n'est pas constamment positif à partir d'une certaine valeur de x.

Nous allons pour cela utiliser le lemme suivant, dû à Landau:

LEMME 2 (cf. [7, 8, 11]). *Soit* $h\colon [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ *une fonction continue par morceaux. Soit*

$$H(s) = \int_1^\infty \frac{h(x)}{x^s}\, dx$$

la tranformée de Mellin de h. Soit σ_0 *l'abscisse de convergence de* $H(s)$; *on sait que* $H(s)$ *est holomorphe pour* $\operatorname{Re} s > \sigma_0$. *S'il existe* $x_0 \geqslant 1$, *tel que pour* $x \geqslant x_0$ $h(x)$ *soit de signe constant, alors la fonction* $H(s)$ *ne peut pas se prolonger en une fonction holomorphe au voisinage de* $s = \sigma_0$.

On va appliquer ce lemme avec $h(x) = J(x)$ si $x \geqslant 2$ et $h(x) = 0$ pour $1 \leqslant x < 2$. On pose, pour $\operatorname{Re} s > 1$

$$G(s) = \int_2^\infty \frac{J(x)}{x^s}\, dx = \int_2^\infty \frac{1}{x^s} \int_x^\infty \frac{R(t)}{t^2} \frac{(\log t + 1)}{\log^2 t}\, dt.$$

Le théorème des nombres premiers donne $|R(t)| = O(t/\log t)$. L'intégrale double est absolument sommable et l'on a:

$$\begin{aligned} G(s) &= \int_2^\infty \frac{R(t)}{t^2} \frac{\log t + 1}{\log^2 t} \int_2^t \frac{dx}{x^s} \\ G(s) &= \frac{1}{s-1} \left(2^{1-s} J(2) - \int_2^\infty \frac{R(t)}{t^{s+1}} \left(\frac{1}{\log t} + \frac{1}{\log^2 t}\right) dt\right) \end{aligned} \tag{21}$$

et l'expression dans la paranthèse s'annule pour $s = 1$.

Du résultat classique (cf. [6, p. 18]):

$$\int_2^\infty \frac{\psi(t)}{t^{s+1}}\, dx = -\frac{1}{s} \frac{\zeta'}{\zeta}(s) \qquad \operatorname{Re} s > 1$$

on déduit:

$$\int_2^\infty \frac{R(t)}{t^{s+1}}\, dt = \int_2^\infty \frac{\psi(t)}{t^{s+1}}\, dt - \int_1^\infty \frac{dt}{t^s} + \int_1^2 \frac{dt}{t^s}.$$

La troisième intégrale est une fonction entière $E_1(s)$: on peut soit appliquer le théorème de dérivation d'une fonction définie par une intégrale, soit observer que l'abscisse de convergence de cette transformée de Mellin particulière est $-\infty$. Et l'on a:

$$\int_2^\infty \frac{R(t)}{t^{s+1}}\, dt = -\frac{1}{s} \frac{\zeta'}{\zeta}(s) - \frac{1}{s-1} + E_1(s) \qquad \operatorname{Re} s > 1. \tag{22}$$

On sait à partir de la relation

$$(1-2^{1-s})\,\zeta(s)=1-2^{-s}+3^{-s}-4^{-s}+\cdots$$

que la fonction ζ n'a pas de zéros sur l'axe réel, $0<s<1$ et donc aussi dans un ouvert simplement connexe

$$W=\{s;\operatorname{Re}s>1\}\cup\{s;0<\operatorname{Re}s\leqslant 1\text{ et }|\operatorname{Im}s|<\delta\}$$

pour un certain δ (Les calculs des zéros de la fonction ζ autorisent $\delta=14$). Le 2[e] membre de (22) est holomorphe au voisinage de $s=1$ et dans W, et donc admet dans W une primitive $G_1(s)$ et une primitive seconde $G_2(s)$.

On a donc:

$$\int_2^{\infty}\frac{R(t)}{t^{s+1}}\frac{1}{\log t}\,dt=-G_1(s)+\lambda \qquad \operatorname{Re}s>1$$

et

$$\int_2^{\infty}\frac{R(t)}{t^{s+1}}\frac{1}{\log^2 t}\,dt=G_2(s)+\lambda s+\mu \qquad \operatorname{Re}s>1$$

La formule (21) devient alors:

$$G(s)=\frac{1}{s-1}\left(G_1(s)-G_2(s)+E_2(s)\right) \qquad \operatorname{Re}s>1 \tag{23}$$

où $E_2(s)$ est une fonction entière de s. La parenthèse est une fonction holomorphe dans W, nulle en $s=1$, donc le second membre de (23) est holomorphe dans W, et $G(s)$ se prolonge en une fonction sans singularité pour $0<s\leqslant 1$.

Si $J(x)$ gardait un signe constant pour x assez grand, le lemme 2 nous dirait que l'abscisse de convergence σ_0 de $G(s)$ vérifie $\sigma_0\leqslant 0$ et donc $G(s)$ se prolongerait en une fonction holomorphe pour $\operatorname{Re}s>0$. Or ceci est impossible, car (23) entrainerait que $G_1(s)-G_2(s)$ est holomorphe pour $\operatorname{Re}s>0$, et aussi $G_1''(s)-G_2''(s)$. Et au voisinage d'un zéro ρ de multiplicité m de la fonction ζ, on a:

$$G_2''(s)\sim-\frac{1}{s}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\sim-\frac{1}{\rho}\frac{m}{s-\rho}$$

et

$$G_1''(s)\sim\frac{d}{ds}\left(-\frac{1}{s}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right)\sim\frac{m}{\rho(s-\rho)^2}$$

et $G_1''-G_2''$ aurait un pôle d'ordre 2 en $s=\rho$.

Remarque. Nous n'avons pas utilisé jusqu'ici d'hypothèses sur les zéros de la fonction ζ, car on sait qu'il en existe une infinité sur la droite $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$. La proposition 1, les inégalités (19) et (20) et ce début du paragraphe IV constituent une démonstration du théorème 1.

PROPOSITION 3. *Si l'hypothèse de Riemann est fausse, on a, pour tout b tel que $1 - \Theta < b < 1/2$, $J(x) = \Omega_{\pm}(x^{-b})$ c'est-à-dire $\overline{\lim}\, x^b J(x) > 0$ et $\underline{\lim}\, x^b J(x) < 0$.*

DÉMONSTRATION. Il suffit d'adapter la démonstration précédente, suivant la méthode usuelle pour obtenir les "Ω-théorèmes" (cf. [7, Chap. V]). Soit b vérifiant $1 - \Theta < b < 1/2$, il existe un zéro ρ de $\zeta(s)$ de partie réelle $\operatorname{Re} \rho = \beta > 1 - b$.

On va montrer que $J(x) - x^{-b}$, puis $J(x) + x^{-b}$ ne gardent pas un signe constant lorsque $x \to +\infty$. Pour cela on calcule la transformée de Mellin:

$$(\operatorname{Re} s > 1) \qquad \int_2^{\infty} \frac{J(x) - x^{-b}}{x^s}\, dx = G(s) - \frac{1}{s - 1 + b} + E_3(s)$$

où $E_3(s) = \int_1^2 x^{-b-s}\, dx$ est une fonction entière. Le deuxième membre se prolonge en une fonction holomorphe dans $W_b = W \cap \{s; \operatorname{Re} s > 1 - b\}$. Si $J(x) - x^{-b}$ avait un signe constant, l'abscisse de convergence de cette transformée de Mellin serait $\leqslant 1 - b < \beta$, ce qui est impossible puisque $G(s)$ a une singularité ρ de partie réelle β. On procède de même avec $J(x) + x^{-b}$.

La proposition 1, (19) et (20) montrent que pour $x \geqslant 3000$, on a $\log f(x) \leqslant J(x)$ et la proposition 3 donne $\underline{\lim}\, x^b \log f(x) < 0$. Il nous reste à démontrer dans le (c) du théorème 3 que $\log f(x) = \Omega_+(x^{-b})$ et pour cela, compte tenu de (4), à étudier $K(x) - S^2(x)/x^2 \log x$. Il résulte de la formule 3.36 de [3]:

$$\psi(x) - \theta(x) < 1{,}42620\, \sqrt{x} \qquad \forall x > 0$$

que l'on a:

$$J(x) - \tfrac{3}{2} F_{1/2}(x) \leqslant K(x) \leqslant J(x).$$

L'estimation de $F_{1/2}(x)$ fournie par le lemme 1 et la proposition 3 nous indiquent que $K(x) = \Omega_{\pm}(x^{-b})$, pour tout b tel que $1 - \Theta < b < 1/2$.

Etudions maintenant la fonction $y(x) = K(x) - x^{-b}$. Elle est dérivable en tout point x différent d'un nombre premier p, et l'on a:

$$y'(x) = -\frac{S(x)}{x^2}\left(\frac{1}{\log x} + \frac{1}{\log^2 x}\right) + \frac{b}{x^{b+1}}.$$

Cette dérivée peut changer de signe en $x = p$, et l'étude de l'équation $(x - a)(\log x + 1) + bx^{1-b} \log^2 x = 0$ qui n'a qu'une seule racine dans

$[1, +\infty[$ pour $a > 1$ montre que $y'(x)$ s'annule au plus une fois dans l'intervalle $]p, p'[$ où p et p' sont deux nombres premiers consécutifs, dès que $p \geqslant 3$.

L'ensemble des changements de signe de y' est donc discret; rangeons les en une suite (x_i). Cette suite est infinie, puisque, si l'hypothèse de Riemann est fausse, on a $S(x) = \Omega \pm (x^{(\Theta+1-b)/2})$ (cf. [7, Chap. V]).

En un point x_i, y' change de signe et donc aussi

$$S(x) - bx^{1-b}\frac{\log^2 x}{\log x + 1}.$$

Cela signifie que cette quantité est ou bien nulle, ou bien comprise entre 0 et $\log x_i$. Dans tous les cas on aura:

$$S(x_i) = O(x_i^{1-b} \log x_i),$$

et

$$\frac{S^2(x_i)}{x_i^2 \log x_i} = O\left(\frac{\log x_i}{x_i^{2b}}\right).$$

Maintenant il existe une infinité de valeurs de i telles que $y(x_i) > 0$. En effet si la fonction y était négative en tous ses extrémas locaux, elle serait négative partout, cela entrainerait pour tout x, $K(x) \leqslant x^{-b}$ et l'on a vu que $K(x) = \Omega_+(x^{-b'})$ avec $b' = (1 + b - \Theta)/2 < b$.

En un tel point x_i, on aura

$$K(x_i) - \frac{S^2(x_i)}{x_i^2 \log x_i} > x_i^{-b} + O(\log x_i x_i^{-2b})$$

ce qui entraîne $\log f(x) = \Omega_+(x^{-b})$.

References

1. G. H. Hardy and E. M. Wright, "An Introduction to the Theory of Numbers," 4th ed., Oxford Univ. Press (Clarendon), Oxford, 1960.
2. D. P. Parent, "Exercices de théorie des nombres," Gauthier-Villars, Paris, 1978, Collection μ.
3. J. B. Rosser and L. Schoenfeld, Approximate formulas for some functions of prime numbers, *Illinois J. Math.* **6** (1962), 64–94.
4. E. Grosswald, Oscillation theorems of arithmetical functions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **126**, n° 1 (1967), 1–28.
5. G. Robin, Grandes valeurs de la fonction somme des diviseurs et hypothèse de Riemann, à paraître.
6. L. Alaoglu and P. Erdös, On highly composite and similar numbers, *Trans. Amer. Math. Soc.* **56** (1944), 448–469.

7. A. E. INGHAM, "The Distribution of Prime Numbers," Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 30, 1932, reprinted by Hafner, New York, 1964.
8. W. J. ELLISON ET M. MENDES-FRANCE, "Les nombres premiers," Hermann, Paris, 1975. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1366.
9. H. M. EDWARDS, "Riemann's Zeta Function," Academic Press, New York/London, 1974.
10. J. B. ROSSER AND L. SCHOENFELD, Sharper bounds for the Chebyshev functions $\theta(x)$ and $\psi(x)$, *Math. Comp.* **29**, No. 129 (1975), 243–269.
11. D. V. WIDDER, "The Laplace Transform," Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1946.